

Università degli Studi di Roma
“*La Sapienza*”
Facoltà di Ingegneria

**Controllo non lineare dell’Assetto di Piattaforme Satellitari
equipaggiate con V.S.C.M.G. (Variable Speed Control
Momentum Gyroscopes)**

Laureando

Riccardo Bevilacqua

Relatore

Prof. Chiara Valente

Correlatore

Ing. Dario Izzo

Anno Accademico 2001/2002

A mia madre Maria Lucrezia e a mio fratello Gregorio.

Indice

Acronimi	1
Introduzione	2
1 Equazioni della dinamica di un sistema V.S.C.M.G.	5
1.1 Notazione	5
1.2 Equazioni generali del moto e prima equazione cardinale	6
1.3 Dinamica d'assetto della Piattaforma Satellitare	7
1.3.1 Equazioni vettoriali	7
1.3.2 Equazioni scalari	9
1.3.3 R.W.	12
1.3.4 C.M.G.	12
1.3.5 V.S.C.M.G.	14
1.4 Dinamica dei V.S.C.M.G.	15
1.4.1 Dinamica giunti	15
1.4.2 Dinamica ruote	17
1.5 Rappresentazione cinematica dell'assetto	18
1.6 Sistema completo	22
1.7 Configurazione piramidale di V.S.C.M.G.	24
2 Stabilità: approccio alla Lyapunov	25
2.1 Descrizione generale	25
2.2 Funzione di Lyapunov	26
2.3 Relazione matriciale per la Stabilità	30
3 Le leggi di controllo	33
3.1 Velocity Based	33
3.1.1 Filosofia di controllo	33
3.1.2 Problema di minimo vincolato per il Velocity Based	37
3.2 Torque Based	38
3.2.1 Relazione matriciale con le coppie	38
3.2.2 Problema di minimo vincolato per il Torque Based	40
3.3 Acceleration Based	42

4	V.S.C.M.G. Toolbox, V2.0	43
4.1	Librerie: generalità	45
4.2	VSCMG dynamics	47
4.3	Rigid Body Attitude Kinematics	60
4.4	Transformations	63
4.5	New Animations	67
4.6	Controllers for Attitude Tracking	69
4.7	Perchè le S-functions?	75
4.8	Assemblaggio: modelli completi per le simulazioni	77
4.9	Visualizzazione delle manovre	81
4.10	Come simulare R.W. e C.M.G.	82
5	Simulazioni numeriche di manovre satellitari	83
5.1	Confronto sistemi di fly-wheels	83
5.1.1	R.W.	83
5.1.2	C.M.G.	88
5.1.3	V.S.C.M.G.	91
5.1.4	Risultato confronto	94
5.2	Confronto Velocity Based-Torque Based	95
5.3	Manovre e analisi dei parametri	117
5.3.1	Slew	117
5.3.2	Precessione	145
5.4	Failure Mode	160
5.4.1	Slew Fail	161
5.4.2	Precessione Fail	164
6	Conclusioni	171
A	Appendice: Precessione Regolare	174
	Bibliografia	176

Acronimi

ACS:	Attitude Control System
CMG:	Control Momentum Gyroscopes
DCM:	Direction Cosine Matrix
EP:	Euler Parameters
IPACS:	Integrated Power And Attitude Control System
ISS:	International Space Station
MRP:	Modified Rodriguez Parameters
RPM:	Round Per Minute
RW:	Reaction Wheels
SGCMG	Single Gimballed Control Momentum Gyroscopes
VSCMG:	Variable Speed Control Momentum Gyroscopes

Introduzione

Allo stato attuale dell'arte esistono diversi attuatori per erogare coppie, al fine di controllare l'assetto di una piattaforma satellitare. I metodi più comuni sono l'utilizzo di propulsori (elettrici, a ioni o della categoria dei *cold gas thrusters*), di *magnetotorquers* e di ruote di momento (*fly-wheels*). Il pregio, nella scelta dei primi, risiede nella relativa semplicità di *design*, sia a livello di costruzione del propulsore che per l'implementazione di un algoritmo di guida e controllo, nonché nell'estrema efficacia nell'esecuzione delle manovre. Il rovescio della medaglia è altrettanto ben noto: l'impatto, sullo schema globale del veicolo spaziale, di serbatoi, sistema di alimentazione e dell'impianto propulsivo nel suo complesso, risulta problematico, a causa dell'ingombro e dei pesi.

Non di minor importanza è il rischio di interferenza tra i gas espulsi e *payloads* esterni, quali dispositivi di comunicazione, pannelli, strumenti ottici, con il deterioramento che ne consegue. Infine il consumo di propellente limita fortemente la ripetibilità delle manovre.

I *magnetotorquers* risultano fortemente vincolati all'esistenza di un campo magnetico esterno e comunque non hanno la versatilità per poter effettuare un inseguimento d'assetto.

I vantaggi nell'impiego di *fly-wheels* (intendendo includere, con tale termine, tutta una gamma di dispositivi generanti coppie tramite un principio di conservazione di momento angolare) sono proprio di essere completamente racchiuse all'interno del veicolo spaziale, in spazi sicuramente modesti rispetto ad un serbatoio. La potenza necessaria a tali attuatori, viene direttamente dal sistema di *power supply*, senza quindi impiegare risorse propulsive. Per contro, la dinamica di tali dispositivi risulta estremamente non lineare, rendendo ardua la ricerca di una legge di controllo, la quale, se esiste, resta di difficoltosa implementazione. Inoltre i valori delle coppie erogabili sono ben diversi.

I sistemi di *fly-wheels* possono essere sostanzialmente divisi in tre principali categorie:

Reaction Wheels (R.W.) E' il più semplice dei tre sistemi. Costituito da ruote, con assi di *spin* fissi nel sistema di riferimento solidale alla piattaforma spaziale, genera coppie (attorno agli *spin axes*) grazie alla possibilità di variazione della velocità angolare delle stesse. Con un sistema di tre ruote si possono generare coppie in ogni direzione e verso nello spazio tridimensionale. Inoltre vanno tenuti in conto effetti giroscopici per l'esistenza di elementi rotanti all'interno del veicolo. La coppia che però si ottiene da un sistema *R.W.* risulta estremamente limitata, ed inoltre il problema della saturazione delle ruote limita la ripetibilità delle manovre, portando con sé la necessità di un impianto di desaturazione.

Control Moment Gyros (C.M.G.) In tale dispositivo le ruote mantengono velocità costante e sono installate su giunti cardanici (*gimbals*) in grado di ruotare attorno ai propri assi

di minima inerzia (fissi nel riferimento satellitare); sono spesso citati in letteratura con l'acronimo *S.G.C.M.G.* (*Single Gimbaled C.M.G.*), ad indicare che i giunti hanno un solo grado di libertà, per distinguerli dai casi in cui gli assi attorno a cui possono ruotare sono due. Si generano così coppie ortogonali agli assi di *spin* delle ruote, per lo spostamento del vettore momento della quantità di moto delle stesse, causato dalla rotazione dei giunti. Queste coppie risultano elevate rispetto a quelle erogabili da un sistema *R.W.* grazie al ben noto effetto di **amplificazione della coppia**. Inoltre, eventuali accelerazioni angolari dei giunti, danno luogo a componenti di coppia lungo l'asse di rotazione degli stessi. Come vedremo, tali termini sono in realtà molto modesti (l'inerzia dei *gimbals* attorno a tali assi è molto bassa) e non è auspicabile utilizzarli ai fini del controllo.

Lo svantaggio dei *C.M.G.* risiede nella possibilità del raggiungimento di configurazioni dette singolari per la posizione dei giunti. Esistono delle regioni in cui il sistema ha difficoltà ad erogare la coppia richiesta; a seconda della direzione di quest'ultima può verificarsi che il sistema si trovi in una posizione per cui risulta impossibilitato a generarla. In molti lavori si utilizzano tecniche di controllo che evitano il raggiungimento di queste configurazioni ([6], [5], [8]), ma nonostante tali accorgimenti, il sistema potrebbe trovarsi di fronte ad un inaccurato inseguimento d'assetto. Strutture di grandi dimensioni montano sistemi *C.M.G.* proprio per l'attrattiva dell'effetto di amplificazione della coppia (SKYLAB, ISS, si vedano [12] e [5]).

Variable Speed Control Moment Gyros (V.S.C.M.G.) Nei più recenti lavori [2, 3, 13, 15, 14] si utilizza la possibilità di variare la velocità di *spin* delle ruote in un sistema *C.M.G.*, portandolo così ad essere un sistema *V.S.C.M.G.*. In questo modo si uniscono i vantaggi dei primi due schemi illustrati. Le configurazioni singolari non sono più un problema in quanto, se raggiunte, possono essere compensate dai gradi di libertà introdotti con l'accelerazione delle ruote. La coppia richiesta può essere generata per ogni posizione degli attuatori. Avere dei gradi di libertà aggiuntivi dà inoltre spazio a sempre più nuove possibilità di impiego del sistema di *Attitude Control* [**A.C.S.**] integrandolo, ad esempio, con un sistema di generazione e immagazzinamento di potenza (**Integrated Power and Attitude Control System** [**I.P.A.C.S.**], si vedano [3, 13, 14, 15]). In realtà tale idea è di vecchia data e fu ipotizzata per prima da *Roes* nel 1961 [20], limitata al tempo alle *R.W.*. L'**I.P.A.C.S.** non è stato finora realizzato a causa delle elevate velocità di rotazione richieste da un sistema di conversione di energia meccanica in elettrica (e viceversa) (40.000-80.000 Rotazioni al minuto RPM) contro le tipiche velocità di un sistema *C.M.G.* (circa 5000 Rotazioni al minuto RPM). Il progresso nella scienza dei materiali compositi, sempre più performanti, permette, al giorno d'oggi, di ritenere possibile la creazione di sistemi rotanti in grado di sopportare elevate velocità, quali quelle tipiche di un sistema di generazione di potenza elettrica. A tal proposito il *N.A.S.A. Glenn Research Center* ha annunciato di recente la realizzazione di un sistema di immagazzinamento di potenza che sostiene una velocità di regime pari a 60.000 RPM ([4]).

Per concludere questa descrizione preliminare sui *V.S.C.M.G.* osserviamo come, negli articoli fin qui citati, si utilizzi un approccio alla *Lyapunov* al fine di ricavare delle leggi di controllo per questi sistemi non lineari. La stessa filosofia sarà seguita nel presente

lavoro di tesi. Infine citiamo l'articolo di *Tsiotras et al.*[3] in cui si illustra come siano sufficienti due ruote montate su giunti per avere un numero di variabili che garantiscano la controllabilità della piattaforma, cosa che peraltro dimostreremo più avanti.

Gli scopi, che questo lavoro di tesi si prefigge, sono:

- Studiare il comportamento di un satellite equipaggiato con un sistema di attuatori *V.S.C.M.G.*, comprenderne la dinamica, dopo aver ricavato le equazioni che la governano, introducendo, nella scrittura di queste, l'elegante notazione delle vettrici di *Hughes* [26].
- Ricavare delle leggi di controllo per l'inseguimento d'assetto. Si scriveranno due diversi controllori per poi confrontarli ed essere in grado di fare una critica motivata alla letteratura esistente. Il confronto avverrà naturalmente grazie all'utilizzo della *Toolbox* citata di seguito, la quale sarà dotata di blocchi accessori per i diversi sistemi di controllo.
- Creare una *Toolbox* (**V.S.C.M.G. Toolbox, V2.0**) (*upgrade* e completamento della versione parziale programmata dall'Ing. *Dario Rocco Izzo*, [1]) tramite la quale l'utente possa facilmente costruire una simulazione numerica di un generico sistema *V.S.C.M.G.*, nonché di sistemi *C.M.G.* e *R.W.* (con piccole modifiche nei modelli e nei parametri di simulazione), avvalendosi di semplici interfacce grafiche, dove è possibile impostare i parametri desiderati, e di blocchi di facile assemblaggio.
- Confrontare, a mezzo di simulazioni numeriche, i classici sistemi *R.W.* e *C.M.G.* con i *V.S.C.M.G.*, con lo scopo di evidenziare le migliorie apportate dall'utilizzo di questi ultimi.
- Riportare alcune applicazioni ipotizzabili per manovre satellitari, al fine anche di effettuare un'analisi parametrica, per dedurre l'influenza dei valori che sono a discrezione del *control designer* sul comportamento del sistema.
- A conclusione del lavoro, implementare simulazioni di *Failure Mode* in cui alcuni attuatori risultino danneggiati, e quindi inefficaci, per confrontare gli sforzi di controllo e l'andamento dello stato tra il caso di operatività totale e il caso di operatività parziale. Tale studio andrà anche a dimostrare quanto sopra illustrato per la sufficienza di 2 *V.S.C.M.G.*.

Nel capitolo 1 ci si pone l'obiettivo illustrato per primo, e viene peraltro descritta la configurazione piramidale scelta per la costruzione della *toolbox*. I modelli teorici sviluppati nei primi tre capitoli verranno implementati con **Simulink**[©] (si veda [15]) al fine di costruire una libreria che, come già detto, sarà chiamata **V.S.C.M.G. Toolbox, V2.0**. La descrizione della stessa verrà data nel capitolo 4. Nel 5 saranno invece riportati i risultati di una serie di simulazioni, effettuate al fine di comprendere i limiti e i pregi dei vari tipi di controllo, di poter trarre delle conclusioni critiche (cap. 6) nonché un'analisi parametrica. Infine verranno riportati suggerimenti e proposte per ricerche e sviluppi futuri.

Capitolo 1

Equazioni della dinamica di un sistema V.S.C.M.G.

In questo capitolo si ricaveranno *ex-novo* le equazioni per la dinamica della piattaforma satellitare e per gli elementi costituenti i vari V.S.C.M.G., dove il numero di questi dispositivi è pari ad n . La necessità di riscrivere tali relazioni, reperibili in tutti gli articoli attinenti il problema in questione, deriva dalla volontà di utilizzare una notazione nuova (a nostro giudizio più elegante di quelle utilizzate comunemente), e cioè quella delle vettrici di *Hughes* ([26]). Inoltre sarà più facile comprendere appieno tutti i risvolti del caso, ricavando daccapo il set di equazioni non lineari che governano l'andamento dello stato satellitare. Infine si otterranno delle relazioni valide per un qualsivoglia numero di V.S.C.M.G. installati a bordo del satellite, e per una configurazione spaziale generica. Per ciò che concerne le equazioni della dinamica di giunti e ruote, notiamo come sia molto raro trovare lavori in cui vengano riportate ([2]), in quanto non sono di interesse per gli approcci di controllo che vi si ritrovano. Proprio a causa del non utilizzo delle relazioni riguardanti giunti e ruote, è possibile trovare lavori in cui risultino incomplete, senz'altro per una svista dell'autore ([6]), cosa che comunque non incide affatto sul resto del lavoro. Come appunto finale sottolineiamo che le suddette relazioni sono di utilità non indifferente, anche per modelli in cui non si tenga conto della dinamica dei V.S.C.M.G., in quanto comunque permettono di stimare le coppie che devono essere erogate dal sistema di controllo.

1.1 Notazione

Un sistema satellitare, equipaggiato con *Single Gimbaled Variable Speed Control Momentum Gyroscopes*, può riguardarsi come un insieme di corpi rigidi che si scambiano forze e coppie attraverso motori e vincoli. Il principale di questi elementi è la piattaforma satellitare, che sarà qui indicata con la lettera \mathcal{R} . Ogni singola struttura costituita da giunto+ruota sarà invece denominata \mathcal{W}_j . I \mathcal{W}_j , con $j = 1..n$ sono quindi i rimanenti elementi rigidi del sistema satellitare nel suo complesso. Alla terna inerziale, alla quale ci riferiremo, per descrivere l'evoluzione del moto d'assetto del veicolo spaziale, associamo la notazione \mathcal{F}_i e la vettrice $\mathcal{F}_i = [\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3]^T$, composta dai tre versori della base. Sia O un punto solidale a \mathcal{R} , sarà preso come origine

della terna corpo \mathcal{F}_b associata a \mathcal{R} stessa. Si ha quindi la vettore $\mathcal{F}_b = [\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3]^T$. I centri di massa della piattaforma, della j-sima struttura di giunto+ruota, e del sistema nel suo complesso, siano rispettivamente $\oplus_{\mathcal{R}}$, $\oplus_{\mathcal{W}_j}$ e \oplus_T . Al j-simo V.S.C.M.G. associamo infine una terna $\mathcal{F}_j = [\hat{a}_{g_j}, \hat{a}_{s_j}, \hat{a}_{t_j}]^T$ dove i tre versori indicano nell'ordine le direzioni di: asse del giunto, asse di rotazione della ruota, asse trasverso (formante una terna ortonormale levogira con i primi due). Trattando la dinamica d'assetto di più corpi rigidi, sarà necessaria una notazione anche per momenti, matrici e diadici d'inerzia. Per la piattaforma \mathbf{J} sarà la matrice d'inerzia, mentre $\vec{\mathbf{J}}$ il diadico, riferiti alla terna \mathcal{F}_b . Per la j-sima struttura ruota+giunto saranno invece \mathbf{Y} e $\vec{\mathbf{Y}}$, riferiti a \mathcal{F}_j . In particolare \mathbf{Y}_j risulta diagonale e gli elementi che la compongono sono Y_{g_j} , Y_{s_j} , Y_{t_j} (scelta la terna principale d'inerzia). La parte di questa matrice che deriva dal giunto è indicata con \mathbf{I}_j^g , mentre per la ruota è \mathbf{I}_j^r , per cui risulta $\mathbf{Y}_j = \mathbf{I}_j^g + \mathbf{I}_j^r$. Relativamente ad un dato vettore $\vec{\mathbf{v}} = [v_x, v_y, v_z]^T$ introduciamo la matrice antisimmetrica che permette di moltiplicare vettorialmente $\vec{\mathbf{v}}$ per un altro generico vettore, semplicemente premoltiplicando quest'ultimo per la suddetta matrice:

$$\mathbf{v}^x = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Equazioni generali del moto e prima equazione cardinale

Per un generico sistema di masse si può scrivere:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\mathbf{p}}} &= \vec{\mathbf{f}} \\ \dot{\vec{\mathbf{h}}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 \times \vec{\mathbf{p}} &= \vec{\mathbf{g}}_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Chiamando con $\mathcal{B} = \mathcal{R} \bigcup_{j=1}^n \mathcal{W}_j$, i simboli riportati in 1.1 sono:

$\vec{\mathbf{p}}$	$:= \int_{\mathcal{B}} \rho \vec{\mathbf{v}} dV$	Quantità di moto totale del sistema
$\vec{\mathbf{f}}$		Somma delle forze esterne agenti sul sistema
$\vec{\mathbf{h}}_0$	$:= \int_{\mathcal{B}} \rho \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} dV$	Momento della quantità di moto totale del sistema rispetto a O
$\vec{\mathbf{v}}_0$		Velocità del punto O in \mathcal{F}_i
$\vec{\mathbf{g}}_0$		Somma delle coppie esterne agenti sul sistema rispetto a O

Con riferimento alla figura 1.1, la velocità $\vec{\mathbf{v}}$ di un punto \mathcal{P} , appartenente al sistema, risulta:

$$\vec{\mathbf{v}} = \dot{\vec{\mathbf{R}}} = \dot{\vec{\mathbf{R}}}_0 + \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \dot{\vec{\mathbf{r}}}$$

Definendo:

$$\vec{\mathbf{c}} := \int_{\mathcal{B}} \rho \vec{\mathbf{r}} dV$$

possiamo scrivere che:

$$\vec{\mathbf{p}} = M\vec{\mathbf{v}}_0 + \dot{\vec{\mathbf{c}}}$$

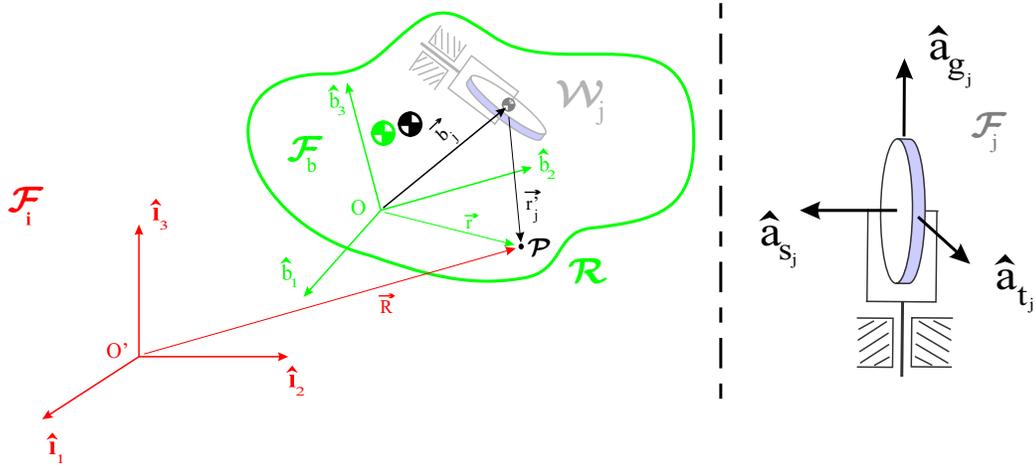


Figura 1.1: Definizione sistemi di riferimento.

dove M è la massa totale di \mathcal{B} . Nel caso del nostro problema risulta:

$$\vec{c} = \int_{\mathcal{R}} \int_{j=1}^n \rho \vec{r} dV = \int_{\mathcal{R}} \rho \vec{r} dV + \sum_{j=1}^n \int_{W_j} \rho \vec{r} dV = \vec{c}_b + \sum_{j=1}^n \int_{W_j} \rho (\vec{r}'_j + \vec{b}_j) dV$$

e ancora:

$$\vec{c} = \vec{c}_{\mathcal{R}} + \sum_{j=1}^n m_j \vec{b}_j$$

dove $\vec{c}_{\mathcal{R}}$ è calcolato rispetto a O e m_j è la massa della generica ruota+giunto. La distribuzione di massa delle ruote non varia nel tempo, data la loro simmetria, ed inoltre \vec{b}_j è costante in \mathcal{F}_b , per cui si ricava:

$$\dot{\vec{p}} = M\dot{\vec{v}}_0 + \vec{c} = M\dot{\vec{v}}_0 + \vec{c}_{\mathcal{R}} + \sum_{j=1}^n m_j \ddot{\vec{b}}_j = \vec{f} \quad (1.2)$$

Scegliendo $O \equiv \oplus_T$ si giunge alla ben nota:

$$\dot{\vec{p}} = M\dot{\vec{v}}_{\oplus_T} = \vec{f} \quad (1.3)$$

Andiamo a ricavare la relazione che più ci interessa, e cioè la seconda equazione cardinale per il sistema V.S.C.M.G..

1.3 Dinamica d'assetto della Piattaforma Satellitare

1.3.1 Equazioni vettoriali

Si è già definito il momento della quantità di moto totale del sistema rispetto al punto O :

$$\vec{h}_O = \int_{\mathcal{B}} \rho \vec{r} \times \vec{v} dV$$

essendo $\vec{v} = \vec{v}_O + \dot{\vec{r}} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} + \overset{\circ}{\vec{r}}$, dove il pallino indica la derivata di un vettore rispetto ad \mathcal{F}_b , mentre $\vec{\omega}$ è la velocità angolare della terna \mathcal{F}_b rispetto a \mathcal{F}_i . Quindi si ricava:

$$\vec{h}_O = \vec{c} \times \vec{v}_O + \int_{\mathcal{R}} \rho \vec{r} \times \left(\overset{\circ}{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) dV + \sum_{j=1}^n \mathcal{W}_j \int \rho \vec{r} \times \left(\overset{\circ}{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) dV$$

Nel primo integrale risulta $\overset{\circ}{\vec{r}} = 0$ in quanto \mathcal{F}_b è la terna solidale ad \mathcal{R} . Ponendo inoltre $\vec{J}_b := \int_{\mathcal{R}} \rho \left(r^2 \vec{1} - \vec{r}\vec{r} \right) dV$, quale il diadico d'inerzia della piattaforma rispetto a O , si scrive:

$$\int_{\mathcal{R}} \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV = \int_{\mathcal{R}} \rho \left(r^2 \vec{1} - \vec{r}\vec{r} \right) dV \cdot \vec{\omega} = \vec{J}_b \cdot \vec{\omega}$$

Il secondo integrale risulta:

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{W}_j \int \rho \vec{r} \times \left(\overset{\circ}{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) dV = \sum_{j=1}^n \mathcal{W}_j \int \rho \left(\vec{b}_j + \vec{r}'_j \right) \times \left[\vec{\omega} \times \left(\vec{b}_j + \vec{r}'_j \right) \right] dV + \sum_{j=1}^n \mathcal{W}_j \int \rho \vec{r} \times \overset{\circ}{\vec{r}} dV$$

Notando che $\int_{\mathcal{W}_j} \rho \vec{r}'_j dV = 0$, in quanto \vec{r}'_j è il vettore congiungente il baricentro di \mathcal{W}_j ($\oplus \mathcal{W}_j$) con il generico punto P , e quindi l'integrale in questione rappresenta il momento statico della struttura j-sima rispetto al centro di massa della stessa, abbiamo:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \mathcal{W}_j \int \rho \left(\vec{b}_j + \vec{r}'_j \right) \times \left[\vec{\omega} \times \left(\vec{b}_j + \vec{r}'_j \right) \right] dV + \sum_{j=1}^n \mathcal{W}_j \int \rho \vec{r} \times \overset{\circ}{\vec{r}} dV = \\ & \sum_{j=1}^n \vec{Y}_j \cdot \vec{\omega} + \sum_{j=1}^n m_j \left(b_j^2 \vec{1} - \vec{b}_j \vec{b}_j \right) \cdot \vec{\omega} + \sum_{j=1}^n \mathcal{W}_j \int \rho \vec{r} \times \overset{\circ}{\vec{r}} dV \end{aligned}$$

dove $\vec{Y}_j = \int_{\mathcal{W}_j} \rho \vec{r}'_j \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'_j \right) dV$ è il diadico d'inerzia della struttura j-sima ruota+giunto rispetto a $\oplus \mathcal{W}_j$. Il termine $\sum_{j=1}^n m_j \cdot \left(b_j^2 \vec{1} - \vec{b}_j \vec{b}_j \right)$ rappresenta invece il diadico d'inerzia di un sistema di masse puntiformi m_j posizionate in corrispondenza dei centri di massa $\oplus \mathcal{W}_j$. Riassumendo, siamo giunti alla seguente espressione per il momento della quantità di moto:

$$\vec{h}_O = \vec{c} \times \vec{v}_O + \left(\vec{J}_b + \sum_{j=1}^n \vec{Y}_j + \sum_{j=1}^n m_j \left(b_j^2 \vec{1} - \vec{b}_j \vec{b}_j \right) \right) \cdot \vec{\omega} + \sum_{j=1}^n \mathcal{W}_j \int \rho \vec{r} \times \overset{\circ}{\vec{r}} dV$$

A questo punto introduciamo gli angoli γ_j rappresentanti le posizioni dei giunti attorno ai rispettivi assi a_{g_j} . Per le ruote invece poniamo Ω_j quale la velocità di rotazione delle stesse attorno agli a_{s_j} (ovvi motivi di simmetria delle *Wheels* fanno sì che non serva un parametro di posizione angolare per questi elementi). I due parametri introdotti sono naturalmente positivi nei versi positivi di a_{g_j} e a_{s_j} rispettivamente. Scriviamo dunque in maniera diversa l'ultimo termine, notando che la velocità angolare della j-sima ruota rispetto a \mathcal{F}_b è $\vec{\omega}_{w_j} = \Omega_j \hat{a}_{s_j} + \dot{\gamma}_j \hat{a}_{g_j}$. Per il j-simo giunto invece, sempre rispetto a \mathcal{F}_b è $\vec{\omega}_{g_j} = \dot{\gamma}_j \hat{a}_{g_j}$. Ricordiamo che il termine \vec{r}

rappresenta la velocità di un generico punto P rispetto a \mathcal{F}_b , essendo in tale terna i punti $\oplus_{\mathcal{W}_j}$ privi di moto, risulta:

$$\sum_{j=1}^n \rho_j \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dV = \sum_{j=1}^n \rho_j \left(\mathbf{b}_j + \mathbf{r}'_j \right) \times \left(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{g_j} \times \mathbf{r}'_j \right) dV + \sum_{j=1}^n \rho_j \left(\mathbf{b}_j + \mathbf{r}'_j \right) \times \left(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{w_j} \times \mathbf{r}'_j \right) dV$$

Tenendo sempre a mente che i momenti statici rispetto ai baricentri sono nulli, e che, per semplicità, si scelgono strutture per cui il baricentro di giunto e ruota coincidono, e cadono quindi entrambi in $\oplus_{\mathcal{W}_j}$, è:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \rho_j \left(\mathbf{b}_j + \mathbf{r}'_j \right) \times \left(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{g_j} \times \mathbf{r}'_j \right) dV + \sum_{j=1}^n \rho_j \left(\mathbf{b}_j + \mathbf{r}'_j \right) \times \left(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{w_j} \times \mathbf{r}'_j \right) dV = \\ \sum_{j=1}^n \rho_j \mathbf{r}'_j \times \left(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{g_j} \times \mathbf{r}'_j \right) dV + \sum_{j=1}^n \rho_j \mathbf{r}'_j \times \left(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{w_j} \times \mathbf{r}'_j \right) dV \end{aligned}$$

Utilizzando i già definiti diadici \bar{I}_j^g e \bar{I}_j^w , relativi al solo giunto e alla sola ruota, rispetto a \mathcal{F}_j :

$$\sum_{j=1}^n \rho_j \mathbf{r}'_j \times \left(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{g_j} \times \mathbf{r}'_j \right) dV + \sum_{j=1}^n \rho_j \mathbf{r}'_j \times \left(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{w_j} \times \mathbf{r}'_j \right) dV = \sum_{j=1}^n \bar{I}_j^g \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}_{g_j} + \sum_{j=1}^n \bar{I}_j^w \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}_{w_j}$$

In definitiva, il momento della quantità di moto, scritto rispetto al generico punto O scelto come polo, posto $\vec{J} = \vec{J}_b + \sum_{j=1}^n m_j \cdot \left(b_j^2 \mathbf{1} - \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j \right)$, scrivendo esplicitamente la $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{w_j}$ e la $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{g_j}$, e avendo \mathcal{F}_j principale d'inerzia, è pari a:

$$\vec{h}_O = \vec{c} \times \vec{v}_O + \left(\vec{J}_b + \sum_{j=1}^n \vec{Y}_j + \sum_{j=1}^n m_j \left(b_j^2 \mathbf{1} - \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j \right) \right) \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} + \sum_{j=1}^n Y_{g_j} \dot{\gamma}_j \hat{\mathbf{a}}_{g_j} + \sum_{j=1}^n Y_{g_j} \Omega_j \hat{\mathbf{a}}_{s_j}$$

Y_{g_j} è l'inerzia della struttura completa di ruota+giunto rispetto all'asse del giunto, mentre $I_{s_j}^w$ è l'inerzia della sola ruota attorno all'asse di *spin*. Se infine $O \equiv \oplus_T$

$$\vec{h}_{\oplus_T} = \left(\vec{J} + \sum_{j=1}^n \vec{Y}_j \right) \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} + \sum_{j=1}^n Y_{g_j} \dot{\gamma}_j \hat{\mathbf{a}}_{g_j} + \sum_{j=1}^n I_{s_j}^w \Omega_j \hat{\mathbf{a}}_{s_j} \quad (1.4)$$

Per derivare tale espressione, e poter scrivere la seconda delle 1.1, passiamo, nel prossimo paragrafo, alla scrittura della 1.4 in termini di componenti in assi corpo. Avendo scelto $O \equiv \oplus_T$ si semplifica il termine $\vec{v}_O \times \vec{p}$ (come si è già calcolato, risulta $\dot{\vec{p}} = M \dot{\vec{v}}_{\oplus_T}$). Si utilizzerà la ben nota relazione che lega la derivata temporale di vettori scritti in riferimenti mobili con quella in assi inerziali. In altri termini, se h_b è il momento della quantità di moto proiettato in assi corpo, si ha $\dot{h}_b + \boldsymbol{\omega}_b^x h_b = g_b$, con g_b vettore della coppia applicata al veicolo spaziale, stimata rispetto a \oplus_T e anch'essa proiettata in assi corpo.

1.3.2 Equazioni scalari

Omettendo, per semplicità di scrittura, gli indici nelle sommatorie e il pedice \oplus_T , proiettiamo la 1.4 in assi corpo, tramite l'ausilio delle vettrici. E' facile convincersi del fatto che un generico

vettore \vec{v} possa scriversi come prodotto della vettore trasposta della terna z in cui lo stiamo riferendo, per la matrice 3×1 delle sue componenti in questa terna: $\vec{v} = \mathcal{F}_z^T v_z$, con $v = [v_{1z}, v_{2z}, v_{3z}]^T$. Risulta dunque:

$$\vec{h} = \mathcal{F}_b^T h_b = (\mathcal{F}_b^T \mathbf{J} \mathcal{F}_b + \sum \mathcal{F}_j^T \mathbf{Y}_j \mathcal{F}_j) \cdot \mathcal{F}_b^T \omega_b + \sum Y_{g_j} \dot{\gamma}_j \mathcal{F}_j^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \mathcal{F}_j^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

per ottenere le componenti premoltiplichiamo per \mathcal{F}_b ottenendo:

$$h_b = (\mathbf{J} + \sum \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T) \omega_b + \sum Y_{g_j} \dot{\gamma}_j \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avendo posto $\mathbf{C}_j = \mathcal{F}_b \mathcal{F}_j^T$, matrice le cui colonne sono le componenti, nella base di \mathcal{F}_b , dei

versori della terna \mathcal{F}_j , che chiameremo $g_j = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_{g_j} \\ \hat{b}_2 \cdot \hat{a}_{g_j} \\ \hat{b}_3 \cdot \hat{a}_{g_j} \end{bmatrix}$, $s_j = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_{s_j} \\ \hat{b}_2 \cdot \hat{a}_{s_j} \\ \hat{b}_3 \cdot \hat{a}_{s_j} \end{bmatrix}$, e $t_j = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_{t_j} \\ \hat{b}_2 \cdot \hat{a}_{t_j} \\ \hat{b}_3 \cdot \hat{a}_{t_j} \end{bmatrix}$,

per cui $\mathbf{C}_j = (g_j | s_j | t_j)$. Per poter passare alla derivata di h_b illustriamo e dimostriamo alcune relazioni riguardanti le appena citate matrici \mathbf{C}_j . Per i versori della generica terna \mathcal{F}_j , definita una configurazione di riferimento tramite i versori $a_{g_{j0}}$, $a_{s_{j0}}$ e $a_{t_{j0}}$, riportata in figura 1.7, vale:

$$\begin{cases} \hat{a}_{t_j} = \cos \gamma_j \hat{a}_{t_{j0}} - \sin \gamma_j \hat{a}_{s_{j0}} \\ \hat{a}_{s_j} = \cos \gamma_j \hat{a}_{s_{j0}} + \sin \gamma_j \hat{a}_{t_{j0}} \\ \hat{a}_{g_j} = \hat{a}_{g_{j0}} \end{cases} \quad (1.5)$$

da cui, derivando, rispetto agli assi corpo della piattaforma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}}_{t_j} = (-\sin \gamma_j \dot{\gamma}_{j0} - \cos \gamma_j \dot{\gamma}_{s_{j0}}) \hat{a}_{t_{j0}} - \sin \gamma_j \dot{\gamma}_{s_{j0}} \hat{a}_{s_{j0}} = -\hat{a}_{s_j} \dot{\gamma}_j \\ \dot{\hat{a}}_{s_j} = (-\sin \gamma_j \dot{\gamma}_{s_{j0}} + \cos \gamma_j \dot{\gamma}_{t_{j0}}) \hat{a}_{s_{j0}} + \cos \gamma_j \dot{\gamma}_{t_{j0}} \hat{a}_{t_{j0}} = \hat{a}_{t_j} \dot{\gamma}_j \\ \dot{\hat{a}}_{g_j} = 0 \end{cases}$$

La derivata della generica matrice \mathbf{C}_j può scriversi:

$$\dot{\mathbf{C}}_j = \dot{\mathcal{F}}_b \mathcal{F}_j^T + \mathcal{F}_b \dot{\mathcal{F}}_j^T = \mathcal{F}_b [\hat{a}_{g_j} \hat{a}_{s_j} \hat{a}_{t_j}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\gamma}_j \\ 0 & \dot{\gamma}_j & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_j \omega_{j_b}^x$$

dove si è posto $\omega_{j_b}^x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\gamma}_j \\ 0 & \dot{\gamma}_j & 0 \end{bmatrix}$ e si è tenuto conto di come sia $\dot{\mathcal{F}}_b = 0$. Allo stesso modo mostriamo che:

$$\dot{\mathbf{C}}_j^T = \dot{\mathcal{F}}_j \mathcal{F}_b^T + \mathcal{F}_j \dot{\mathcal{F}}_b^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\gamma}_j \\ 0 & \dot{\gamma}_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{g_j} \\ \hat{a}_{s_j} \\ \hat{a}_{t_j} \end{bmatrix} [\hat{b}_1 \hat{b}_2 \hat{b}_3] = -\omega_{j_b}^x \mathbf{C}_j^T$$

Scriviamo dunque la derivata in assi corpo di h_b :

$$\begin{aligned} \dot{h}_b = & \left(\mathbf{J} + \sum \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T \right) \dot{\omega}_b + \sum Y_{g_j} \dot{\gamma}_j \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum I_{s_j}^w \dot{\Omega}_j \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ & + \sum (\mathbf{C}_j \omega_{j_b}^x \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T) \omega_b - \sum (\mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \omega_{j_b}^x \mathbf{C}_j^T) \omega_b + \sum Y_{g_j} \dot{\gamma}_j \mathbf{C}_j \omega_{j_b}^x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \mathbf{C}_j \omega_{j_b}^x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E' facile convincersi che $\mathbf{C}_j \omega_{j_b}^x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\gamma}_j \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e che inoltre $\mathbf{C}_j \omega_{j_b}^x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$. Un ulteriore precisazione è necessaria per scrivere in maniera più compatta la derivata di h_b . Derivando il termine $\mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T$ si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T + \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \dot{\mathbf{C}}_j^T &= \mathbf{C}_j \omega_{j_b}^x \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T + \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j (-\omega_{j_b}^x \mathbf{C}_j^T) = \mathbf{C}_j (\omega_{j_b}^x \mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_j \omega_{j_b}^x) \mathbf{C}_j^T = \\ &= \mathbf{C}_j \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\gamma}_j \\ 0 & \dot{\gamma}_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{g_j} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{s_j} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{t_j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y_{g_j} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{s_j} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{t_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\gamma}_j \\ 0 & \dot{\gamma}_j & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{C}_j^T = \\ &= \mathbf{C}_j \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\gamma}_j Y_{t_j} \\ 0 & \dot{\gamma}_j Y_{s_j} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\gamma}_j Y_{s_j} \\ 0 & \dot{\gamma}_j Y_{t_j} & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{C}_j^T = \\ &= \mathbf{C}_j \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\gamma}_j (Y_{s_j} - Y_{t_j}) \\ 0 & \dot{\gamma}_j (Y_{s_j} - Y_{t_j}) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C}_j^T = \\ &= \dot{\gamma}_j (Y_{s_j} - Y_{t_j}) \begin{pmatrix} | & | & | \\ g_j & s_j & t_j \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & g_j & - \\ - & s_j & - \\ - & t_j & - \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | \\ g_j & s_j & t_j \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ - & t_j & - \\ - & s_j & - \end{pmatrix} \dot{\gamma}_j (Y_{s_j} - Y_{t_j}) = \begin{pmatrix} g_{j1} & s_{j1} & t_{j1} \\ g_{j2} & s_{j2} & t_{j2} \\ g_{j3} & s_{j3} & t_{j3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t_{j1} & t_{j2} & t_{j3} \\ s_{j1} & s_{j2} & s_{j3} \end{pmatrix} \dot{\gamma}_j (Y_{s_j} - Y_{t_j}) = \\ &= \begin{pmatrix} 2s_{j1}t_{j1} & s_{j1}t_{j2} + s_{j2}t_{j1} & s_{j1}t_{j3} + s_{j3}t_{j1} \\ s_{j2}t_{j1} + s_{j1}t_{j2} & 2s_{j2}t_{j2} & s_{j2}t_{j3} + s_{j3}t_{j2} \\ s_{j3}t_{j1} + s_{j1}t_{j3} & s_{j3}t_{j2} + s_{j2}t_{j3} & 2s_{j3}t_{j3} \end{pmatrix} \dot{\gamma}_j (Y_{s_j} - Y_{t_j}) = (t_j s_j^T + s_j t_j^T) \dot{\gamma}_j (Y_{s_j} - Y_{t_j}) \end{aligned}$$

Forti di queste osservazioni scriviamo la $\dot{h}_b + \omega_b^x h_b = g_b$ in forma estesa, tenendo a mente anche che $\mathbf{C}_j = (g_j | s_j | t_j)$:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{J} + \sum \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T \right) \dot{\omega}_b + \sum Y_{g_j} \dot{\gamma}_j g_j + \sum I_{s_j}^w \dot{\Omega}_j s_j + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \dot{\gamma}_j t_j \\ & + \sum (Y_{s_j} - Y_{t_j}) \dot{\gamma}_j (t_j s_j^T + s_j t_j^T) \omega_b + \omega_b^x \left(\mathbf{J} + \sum \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T \right) \omega_b + \\ & + \sum Y_{g_j} \dot{\gamma}_j \omega_b^x g_j + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \omega_b^x s_j = g_b \end{aligned} \quad (1.6)$$

La relazione appena ricavata lega l'andamento temporale della velocità angolare satellitare agli ingressi di coppia e a quelli derivanti dall'evoluzione del sistema V.S.C.M.G.. In particolare si

noti come sia possibile dedurre il comportamento di un sistema spaziale equipaggiato di *R.W.* o di *C.M.G.* semplicemente ponendo $\dot{\gamma}_j = 0$ o $\dot{\Omega}_j = 0$ rispettivamente. Nei prossimi paragrafi verranno illustrate le peculiarità di questi due sistemi, attraverso l'analisi della 1.6 specializzata caso per caso, e infine si porrà l'attenzione su come i *V.S.C.M.G.* possano ovviare alle limitazioni di *R.W.* e *C.M.G.*.

1.3.3 R.W.

Ponendo $\dot{\gamma}_j = 0$ nella 1.6 e notando che le matrici C_j sono costanti in questo caso, si ottiene:

$$\mathbf{J}_T \dot{\omega}_b + \omega_b^x \mathbf{J}_T \omega_b + \sum I_{s_j}^w \dot{\Omega}_j s_j + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \omega_b^x s_j = g_b \quad (1.7)$$

La quantità $\mathbf{J}_T = (\mathbf{J} + \sum C_j \mathbf{Y}_j C_j^T)$ è ora una costante in quanto i γ_j non sono più liberi di variare. Come faremo anche nei casi seguenti, per *C.M.G.* e *V.S.C.M.G.*, scegliamo un esempio per illustrare la funzionalità e i limiti del sistema *R.W.*. Sia dato un satellite con velocità angolare nulla. Si voglia mantenere questo stato anche in presenza di eventuali azioni esterne. Ciò significa che, istante per istante, deve valere la 1.7 dove si pone $\omega_b = 0$ e $\dot{\omega}_b = 0$:

$$\sum I_{s_j}^w \dot{\Omega}_j s_j = g_b$$

Il sistema *R.W.* è quindi in grado di erogare coppie in tutte le direzioni, se sono installate almeno tre ruote. Tali coppie sono proporzionali all'accelerazione angolare delle ruote attraverso il coefficiente $I_{s_j}^w$. Nel momento in cui la coppia necessaria risulti elevata, è necessario accelerare molto le ruote, rischiando di saturare il sistema, e quindi di portarlo nella condizione di non poter più rispondere a successive richieste, a causa dell'elevata velocità ormai raggiunta dai dispositivi rotanti.

1.3.4 C.M.G.

Imponendo ora $\dot{\Omega}_j = 0$, e avendo le γ_j libere di variare, si ottiene:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{J} + \sum C_j \mathbf{Y}_j C_j^T) \dot{\omega}_b + \sum Y_{g_j} \ddot{\gamma}_j g_j + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \dot{\gamma}_j t_j + \sum (Y_{s_j} - Y_{t_j}) \dot{\gamma}_j (t_j s_j^T + s_j t_j^T) \omega_b \\ & + \omega_b^x (\mathbf{J} + \sum C_j \mathbf{Y}_j C_j^T) \omega_b + \sum Y_{g_j} \dot{\gamma}_j \omega_b^x g_j + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \omega_b^x s_j = g_b \end{aligned} \quad (1.8)$$

Nello stesso problema del *null motion*, utilizzato nel precedente paragrafo, si ha:

$$\sum Y_{g_j} \ddot{\gamma}_j g_j + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \dot{\gamma}_j t_j = g_b \quad (1.9)$$

Notiamo innanzitutto la proprietà di *Torque Amplification* già accennata nell'introduzione: rispetto alle ruote di momento il termine in Ω_j è moltiplicato per $\dot{\gamma}_j$. Questo permette di ottenere coppie molto più elevate anche con modesti valori delle velocità angolari dei giunti e mantenendo le ruote a velocità costanti. Compare inoltre un termine aggiuntivo in $\dot{\gamma}_j$ che genera coppie attraverso le accelerazioni angolari dei giunti. Notiamo però che le quantità Y_{g_j} sono modeste, e che quindi, cercare di utilizzare il primo termine alla stregua del secondo, significherebbe

forzare i giunti ad accelerare eccessivamente. Questa situazione non è affatto desiderabile in quanto l'efficacia del controllo si perderebbe e il pregio dei C.M.G. non sarebbe sfruttato. Aggiungiamo poi ragioni di carattere prettamente strutturale, le quali rendono impensabile accelerare in maniera elevata i giunti cardanici, rischiando di danneggiare l'intero apparato. Si è inoltre già accennato al problema delle *configurazioni singolari*. Nel caso in cui tutti gli assi trasversi t_j si trovassero ad essere paralleli ad uno stesso piano Π , l'unico modo per esercitare una coppia, che giaccia al di fuori di Π , è di accelerare i giunti, utilizzando il primo termine della 1.9 di cui si è appena discusso. Questa particolare configurazione viene chiamata singolare e porta il sistema ad avere un comportamento indesiderabile. Se il sistema si viene a trovare anche solo in prossimità di una singolarità la reazione è di accelerare i giunti in maniera non consona al *design* dell'apparato. Molti articoli propongono delle strategie di controllo che evitino il raggiungimento delle regioni di singolarità. Citiamo in tal merito [5, 6]; in [8] si illustra una tecnica di *singularity avoidance* tramite l'utilizzo dei gradi di libertà in più di cui sono dotati i V.S.C.M.G.. Uscendo per un istante dalla generalità che caratterizza la presente trattazione, facciamo un passo avanti, parlando in anticipo della configurazione piramidale che sarà poi presa in esame per la costruzione della **V.S.C.M.G. Toolbox, V2.0**. Questo tipo di struttura è comunemente utilizzata in letteratura. La figura seguente riporta un esempio di configurazione singolare:

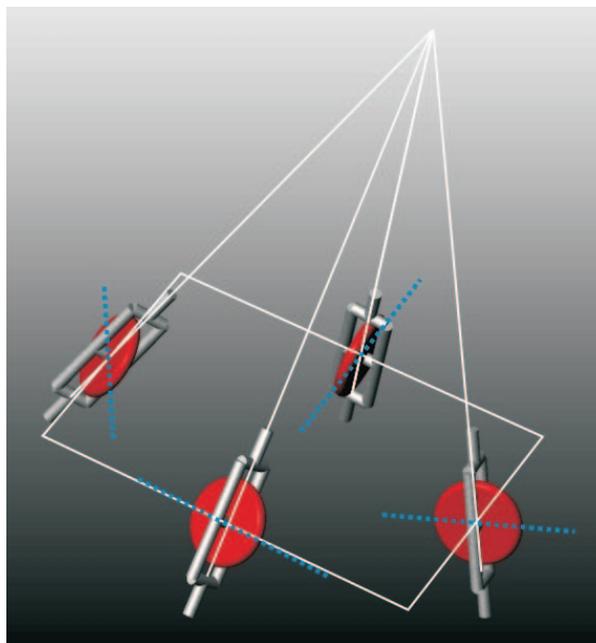


Figura 1.2: Visualizzazione di una configurazione singolare: gli assi trasversi sono paralleli allo stesso piano.

Riportiamo un'interessante visualizzazione tridimensionale, reperibile nell'articolo di *Paradiso* [21], dell'involuppo delle coppie massime erogabili da un *C.M.G.* piramidale, per ogni direzione (fissati dei limiti per le velocità di giunti e ruote). Senza entrare nello specifico dei valori limite imposti, si nota la forma pressochè sferica di questa superficie, con delle zone di rientranza in corrispondenza degli assi dei giunti. Inoltre si illustra una sezione di questo involuppo che permette di individuare gli stati di singolarità.

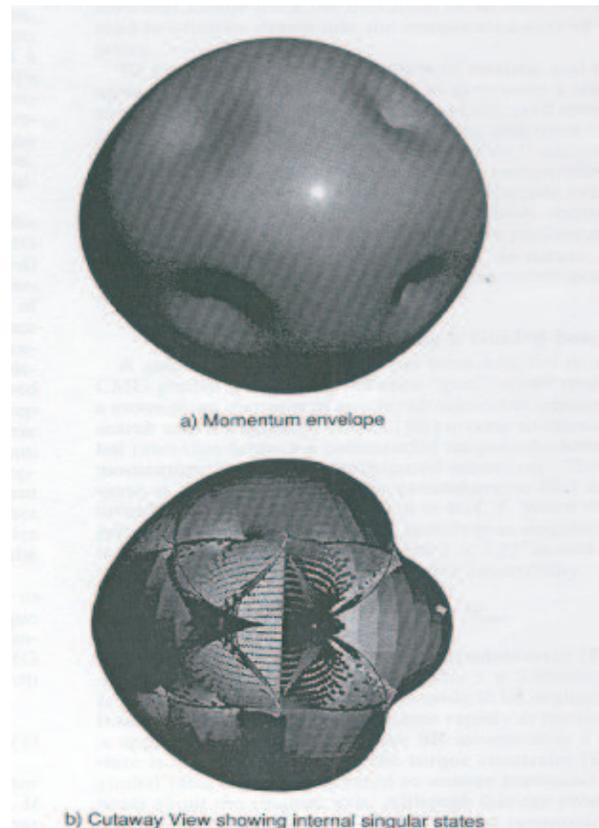


Figura 1.3: Visualizzazione luogo coppia massima erogabile da un sistema *C.M.G.* e stati singolari. Immagine tratta da *Global Steering of Single Gimbaled Control Moment Gyroscopes Using a Directed Search* di *Joseph A. Paradiso*.

Si noti infine come servano almeno 3 *C.M.G.* per il controllo d'assetto. Difatti, per $n = 2$ esiste sempre un piano parallelo ai due assi trasversi e quindi tutte le configurazioni sono potenzialmente singolari.

1.3.5 V.S.C.M.G.

La combinazione delle filosofie di funzionamento dei due *device* finora descritti porta alla nascita di un sistema che non ha problemi di saturazione perchè sfrutta la *torque amplification* propria dei dispositivi *C.M.G.*, ma che non teme le configurazioni singolari, in quanto, nel caso si verificano, ha dei gradi di libertà in più che gli permettono di continuare ad erogare coppie senza

sforzi di controllo indesiderabili: il sistema *Variable Speed Control Momentum Gyroscopes*. La 1.6 nel caso di velocità nulla è:

$$\sum Y_{g_j} \ddot{\gamma}_j g_j + \sum I_{s_j}^w \dot{\Omega}_j s_j + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \dot{\gamma}_j = g_b \quad (1.10)$$

Nel momento in cui non sia possibile generare coppie col terzo termine, la quantità $\sum I_{s_j}^w \dot{\Omega}_j s_j$ permette di continuare a controllare il sistema satellitare, essendo le s_j ortogonali alle t_j , e quindi in grado di lavorare al di fuori del già citato piano Π . La strategia dei V.S.C.M.G. è quindi di lavorare come un semplice C.M.G. lontano dalle singolarità, e di usare l'accelerazione delle ruote in prossimità di queste. In questo caso due dispositivi sono sufficienti e necessari per coprire tutto lo spazio 3 – D in termini di coppie.

1.4 Dinamica dei V.S.C.M.G.

Come fatto per la piattaforma satellitare, scriviamo la seconda equazione cardinale per i giunti e le ruote del generico V.S.C.M.G., al fine di legare l'andamento dei γ_j e delle Ω_j alle coppie che tale dispositivo scambia con la struttura che lo contiene (in altri termini le coppie dei motori che azionano giunti e ruote). In letteratura è alquanto raro trovare le relazioni della dinamica per tali dispositivi, in quanto le leggi di guida sono studiate in modo da considerare γ_j e Ω_j come variabili di controllo, ignorando così la dinamica che ne governa l'evoluzione. Si fa quindi l'assunzione implicita che sia possibile agire direttamente sulle grandezze cinematiche $\dot{\gamma}_j$ e Ω_j . In [2] si accenna al fatto che i C.M.G. in commercio controllino direttamente le $\dot{\gamma}_j$, ma è un dato di fatto che un motore possa essere gestito in modo più immediato se si lavora in termini della coppia che deve erogare. Sia ai fini della completezza, che per la necessità che ne verrà in uno dei due modelli di controllore illustrati nel capitolo 3, andiamo a ricavare tali relazioni.

1.4.1 Dinamica giunti

Il momento della quantità di moto di ruota+giunto, calcolato rispetto a \oplus_{w_j} , risulta:

$$\vec{h}_{gw_j} = \int_{G_j} \rho \vec{r}'_j \times \vec{v} dV + \int_{w_j} \rho \vec{r}'_j \times \vec{v} dV = \vec{I}_j^g \cdot (\vec{\omega} + \vec{\omega}_{g_j}) + \vec{I}_j^w \cdot (\vec{\omega} + \vec{\omega}_{w_j})$$

Nel valutare tale espressione si è tenuto conto del fatto che la velocità del generico punto P appartenete al giunto, o alla ruota, può scriversi come $\vec{v} = \vec{v}_{\oplus w_j} + \vec{r}'_j = \vec{v}_{\oplus w_j} + \vec{r}'_j + \vec{\omega} \times \vec{r}'_j$. Se $P \in$ al giunto allora $\vec{r}'_j = \vec{\omega}_{g_j} \times \vec{r}'_j$, se invece $P \in$ alla ruota allora $\vec{r}'_j = \vec{\omega}_{w_j} \times \vec{r}'_j$. Ricordando infine che il momento statico rispetto al centro di massa è nullo, ci si convince facilmente della precedente. Con l'ausilio delle vettrici è:

$$\mathcal{F}_j^T h_{gw_j} = \mathcal{F}_j^T \mathbf{I}_j^g \mathcal{F}_j \left(\mathcal{F}_b^T \omega_b + \mathcal{F}_j^T \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \mathcal{F}_j^T \mathbf{I}_j^w \mathcal{F}_j \left(\mathcal{F}_b^T \omega_b + \mathcal{F}_j^T \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{F}_j^T \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_j \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

le componenti su \mathcal{F}_j le otteniamo premoltiplicando per la vettore \mathcal{F}_j :

$$\mathcal{F}_j \vec{h}_{gw_j} = \mathbf{I}_j^g \left(\mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\omega}_b + \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \mathbf{I}_j^w \left(\mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\omega}_b + \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_j \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Ricordando che $\mathbf{Y}_j = \mathbf{I}_{w_j} + \mathbf{I}_{g_j}$:

$$h_{gw_j} = \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{Y}_j \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{I}_j^w \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_j \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ricaviamo la prima componente, e cioè quella lungo l'asse del giunto, che indicheremo come K_{g_j} :

$$K_{g_j} = Y_{g_j} \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{g}_j + Y_{g_j} \dot{\gamma}_j \quad (1.11)$$

Il vettore delle coppie scambiate tra piattaforma e giunto, proiettato sugli assi di \mathcal{F}_j risulta quindi:

$$\begin{bmatrix} G_j \\ A_j \\ B_j \end{bmatrix} = \dot{\vec{h}}_{gw_j} + \vec{\boldsymbol{\omega}}_{g_j} \times \vec{h}_{gw_j}$$

con $\boldsymbol{\omega}_{g_j} = \mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\omega}_b + \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ velocità angolare del giunto rispetto alla terna inerziale \mathcal{F}_i , proiettata

in \mathcal{F}_j . Quello che ci interessa è la sola componente lungo l'asse del giunto, in quanto l'attuatore eroga e controlla la coppia in quella direzione. Le altre due componenti sono sostanzialmente delle coppie vincolari e l'unica preoccupazione è che non superino la tolleranza della struttura. Con una serie di passaggi ricaviamo che:

$$\mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\omega}_b = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{g}_j \\ \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{s}_j \\ \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{t}_j \end{pmatrix}$$

quindi:

$$\mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\omega}_b + \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{g}_j + \dot{\gamma}_j \\ \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{s}_j \\ \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{t}_j \end{pmatrix}$$

Allora, la matrice necessaria al prodotto vettoriale $\left(\mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\omega}_b + \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^x$, sarà:

$$\left(\mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\omega}_b + \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^x = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{t}_j & \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{s}_j \\ \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{t}_j & 0 & -\boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{g}_j - \dot{\gamma}_j \\ -\boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{s}_j & \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{g}_j + \dot{\gamma}_j & 0 \end{bmatrix}$$

La prima componente del prodotto vettoriale risulta:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\omega}_b + \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^x h_{g_{w_j}} \right] = -\boldsymbol{\omega}_b \cdot t_j [Y_{s_j} \boldsymbol{\omega}_b \cdot s_j + I_{w_{s_j}} \boldsymbol{\Omega}_j] + \boldsymbol{\omega}_b \cdot s_j Y_{t_j} \boldsymbol{\omega} \cdot t_j = \\ & = [(Y_{t_j} - Y_{s_j}) \boldsymbol{\omega}_b \cdot s_j - I_{w_{s_j}} \boldsymbol{\Omega}_j] (\boldsymbol{\omega}_b \cdot t_j) \end{aligned}$$

Possiamo allora concludere scrivendo:

$$\dot{K}_{g_j} + [(Y_{t_j} - Y_{s_j}) \boldsymbol{\omega}_b \cdot s_j - I_{w_{s_j}} \boldsymbol{\Omega}_j] (\boldsymbol{\omega}_b \cdot t_j) = G_j$$

1.4.2 Dinamica ruote

Ripetiamo gli stessi calcoli per la j -sima ruota. Il momento della quantità di moto, sempre rispetto al punto $\oplus w_j$ vale:

$$\vec{\mathbf{h}}_{w_j} = \int_{w_j} \rho \vec{\mathbf{r}}'_j \times [(\vec{\boldsymbol{\omega}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}_{w_j}) \times \vec{\mathbf{r}}'_j] dV = \vec{I}_j^w \cdot (\vec{\boldsymbol{\omega}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}_{w_j})$$

ancora, tramite vettrici:

$$\mathcal{F}_j^T h_{w_j} = \mathcal{F}_j^T \mathbf{I}_j^w \mathcal{F}_j \left(\mathcal{F}_b^T \boldsymbol{\omega}_b + \mathcal{F}_j^T \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ \boldsymbol{\Omega}_j \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

premultiplicando per \mathcal{F}_j :

$$h_{w_j} = \mathbf{I}_j^w \mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{I}_j^w \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ \boldsymbol{\Omega}_j \\ 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso siamo interessati alla seconda componente di questa relazione, in quanto relativa all'asse di *spin* attorno al quale l'attuatore eroga la coppia. Detta K_{s_j} tale componente è:

$$K_{s_j} = I_{s_j}^w \boldsymbol{\omega}_b \cdot s_j + I_{s_j}^w \boldsymbol{\Omega}_j \quad (1.12)$$

Seguiamo lo stesso procedimento usato per i giunti per calcolare la seconda componente dell'espressione:

$$\begin{bmatrix} D_j \\ S_j \\ E_j \end{bmatrix} = \dot{\vec{\mathbf{h}}}_{w_j} + \vec{\boldsymbol{\omega}}_{g_j} \times \vec{\mathbf{h}}_{w_j}$$

La matrice del prodotto vettoriale resta la stessa del caso dei giunti, in quanto lavoriamo negli assi solidali a questi. Per questo motivo nella relazione appena scritta compare ancora la $\boldsymbol{\omega}_{g_j}$ nel termine di trascinamento della derivata temporale. Evitando di ripetere, per brevità, dei

passaggi sostanzialmente identici, riportiamo direttamente l'equazione scalare di bilancio del momento della quantità di moto:

$$\dot{h}_{w_j} + \left(\mathbf{C}_j^T \boldsymbol{\omega}_b + \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^x h_{w_j} = \begin{bmatrix} D_j \\ S_j \\ E_j \end{bmatrix}$$

La seconda componente dà come risultato:

$$\dot{K}_{s_j} = S_j \quad (1.13)$$

Riassumendo, le due dinamiche sono governate dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} K_{g_j} = Y_{g_j}(\boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{g}_j + \dot{\gamma}_j) \\ \dot{K}_{g_j} + [(Y_{t_j} - Y_{s_j})(\boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{s}_j) - I_{ws_j} \boldsymbol{\Omega}_j](\boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{t}_j) = G_j \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\begin{cases} K_{s_j} = I_{ws_j}(\boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{s}_j + \boldsymbol{\Omega}_j) \\ \dot{K}_{s_j} = S_j \end{cases} \quad (1.15)$$

La seconda delle 1.14 può confrontarsi con le corrispondenti in [6] e [5]. Nel primo articolo si riscontra un errore, mancando il termine in $\boldsymbol{\Omega}_j$. In [2] invece compaiono entrambe le dinamiche, ma scritte come appariranno nel capitolo 3 nelle equazioni 3.20 e 3.25. Si rimanda a tale capitolo per confronti e verifiche.

1.5 Rappresentazione cinematica dell'assetto

Per poter tradurre in termini di assetto, le componenti della velocità angolare della piattaforma scritte in assi corpo (1.6), esistono varie modalità di rappresentazione cinematica. Numerose sono le possibilità di descrizione dell'orientazione satellitare, dai set a tre parametri a quelli a quattro, ognuna con le sue attrattive e i suoi svantaggi. Il numero minimo di parametri necessari alla descrizione d'assetto è tre (si pensi agli angoli di *Eulero*). Ogni set a tre parametri però va incontro al problema delle singolarità, che, a seconda del tipo di scelta effettuata, si incontra in punti diversi dello spazio tridimensionale delle rotazioni del corpo rigido. Per ovviare a tale problema sono stati introdotti set a quattro parametri, e quindi ridondanti, ai quali si deve aggiungere una condizione di vincolo accessoria. In questo modo si riesce ad eliminare tutte le singolarità e i parametri si muovono su di una ipersuperficie nella spazio a quattro dimensioni. Riportiamo una breve descrizione dei tipi di rappresentazione incontrati in letteratura:

Angoli di Eulero Sono il set fondamentale tra quelli a tre parametri. Di importanza accademica in quanto permettono di visualizzare facilmente l'orientazione del corpo rigido. Vengono anche utilizzati per descrivere la posizione della terna perifocale (associata all'orbita satellitare) rispetto a quella inerziale. Vengono in tal caso detti parametri orbitali.

Parametri di Eulero (EP), Quaternioni (Q), Parametri di Cayley-Klein Sono set a quattro parametri con interpretazione fisica leggermente diversa l'uno dall'altro. Si passa da un tipo all'altro con delle semplici permutazioni o cambi di variabili. La condizione accessoria porta i parametri a muoversi su di una ipersfera di raggio unitario.

Parametri di Rodriguez Modificati (MRP) Introdotti in [17], e trattati anche in [19], sono un set a tre parametri pensato in modo da spostare la singolarità a valori elevati dell'angolo di rotazione ($\pm 360^\circ$).

Parametri Stereografici Tra questi sono da includere anche gli appena descritti MRP. Nel lavoro di *Shaub e Junkins* [19] è riportata una tecnica generale per ottenere set a tre parametri come proiezione degli EP (o dei Quaternioni) su un iperpiano di dimensione tre. In tale metodologia è possibile stabilire dove si desidera portare il punto di singolarità tra 0° e 360° .

Ricordiamo brevemente il teorema di *Eulero* per il quale ogni moto sferico può rappresentarsi come una rotazione attorno ad un asse \hat{e} di ampiezza pari ad un angolo Φ . Nel presente lavoro si farà uso degli MRP per la descrizione delle leggi di controllo non lineari, come peraltro fatto in numerosi lavori [1, 2, 3, 13]. In [5] compare invece l'ausilio dei quaternioni nella legge di controllo. Per gli MRP vale:

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T := \sigma := \hat{e} \tan \frac{\Phi}{4} \quad (1.16)$$

Si nota come, per $\Phi = \pm 360^\circ$ il set in questione cada in difetto. Comparando nelle leggi di controllo un termine di errore sull'assetto (σ_e), l'utilizzo degli MRP ci garantisce una discreta tranquillità per ciò che concerne le singolarità. Difatti è alquanto improbabile che l'MRP descrivente un errore arrivi a rotazioni di 360° . Ad ogni modo, nel caso in cui dovesse verificarsi tale situazione il problema può essere aggirato introducendo un cosiddetto *shadow set* di MRP che rappresenta la stessa rotazione, al quale si deve passare nel caso di singolarità. Nel caso degli EP la riflessione dei parametri sul lato opposto della ipersfera genera un set che ha tutti i segni opposti ma rappresenta la stessa rotazione. Un qualcosa di analogo accade per gli MRP: ogni set di parametri stereografici ha il suo *shadow set* che coincide alla riflessione appena descritta del set a quattro parametri. Questi set sono numericamente differenti dagli originali ma rappresentano la stessa rotazione. Utilizzando sapientemente gli MRP, e quindi passando agli *shadow* quando necessario, si possono usare set a tre parametri senza andare incontro a singolarità. Per eventuali approfondimenti si rimanda al lavoro [19]. Anche in [2] vengono brevemente illustrati gli *shadow set*:

$$\sigma^S = -\frac{\sigma}{\sigma^T \sigma}$$

L'interesse per gli MRP non risiede solo nell'aver allontanato la singolarità, ma anche nella non linearità di tipo quadratico nelle equazioni differenziali per la cinematica:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) & -\sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \\ \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 & \frac{1}{2}(1 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2) & -\sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 \\ -\sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 & \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 & \frac{1}{2}(1 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Ciò permette manipolazioni più semplici delle relazioni cinematiche. In breve:

$$\dot{\sigma} = G(\sigma)\omega$$

Un'ultima peculiarità degli MRP risiede nel loro comportamento numerico: le non linearità proprie degli EP spariscono nella rappresentazione con gli MRP, i quali sono pressochè lineari fino a $\pm 80^\circ$. Avendo infatti la tangente comportamento molto vicino alla linearità fino a $\pm 20^\circ$ se ne deduce l'andamento appena descritto per gli MRP. Al di sopra di tali angoli invece si ha una crescita repentina di σ . Quindi, in un largo *range* di rotazioni, si ha il vantaggio di un comportamento quasi lineare. Si riporta un esempio numerico che illustra quanto appena affermato. La simulazione è stata ottenuta con **Simulink**[©], avvalendosi dei blocchi relativi alla descrizione cinematica descritti nel capitolo 4. L'input è una precessione regolare (due componenti della velocità angolare in assi corpo sono sinusoidali sfasate di $\frac{\pi}{2}$, la terza è una costante). Si nota la non linearità globale degli EP e il comportamento lineare, fino ad un certo limite, per gli MRP:

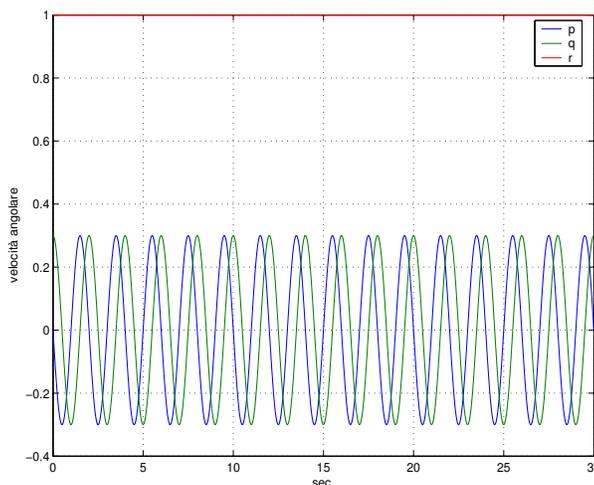
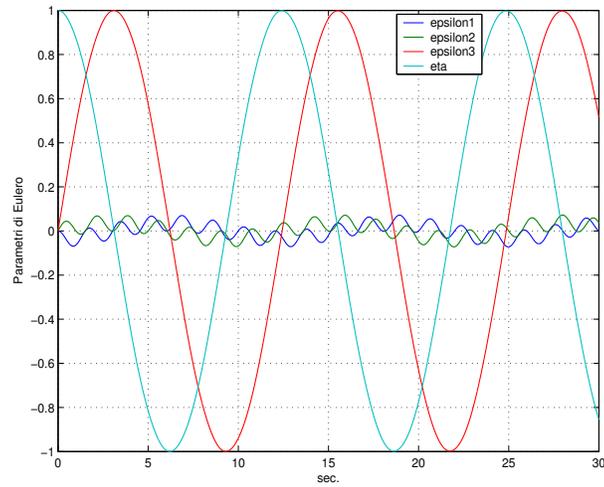
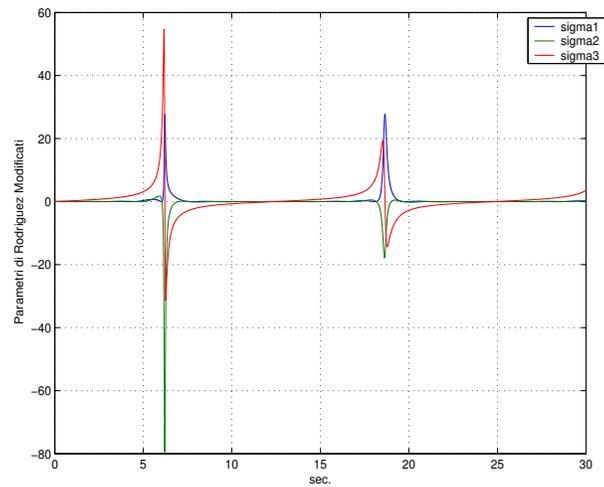


Figura 1.4: Componenti della velocità angolare (rad/s) durante la precessione regolare.

Figura 1.5: Parametri di *Eulero* durante la precessione regolare.Figura 1.6: Parametri di *Rodriguez* Modificati durante la precessione regolare.

Per completezza riportiamo i significati, e i legami con gli MRP, degli EP e dei Quaternioni. Verranno poi ripresi nel capitolo 4 nella sezione detta *Transformations*:

EP

$$(\vec{\varepsilon}, \eta) := (\hat{\varepsilon} \sin \frac{\Phi}{2}, \cos \frac{\Phi}{2}) \quad (1.18)$$

Le relazioni cinematiche sono:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon}_3 \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r & -q & p \\ -r & 0 & p & q \\ q & -p & 0 & r \\ -p & -q & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \eta \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Il legame tra MRP e EP:

$$\sigma_i = \frac{\varepsilon_i}{1 + \eta}$$

Quaternioni

$$Q := [q_0, \vec{q}] := (\cos \frac{\Phi}{2}, \hat{\varepsilon} \sin \frac{\Phi}{2}) \quad (1.20)$$

La cinematica è governata dalle:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Infine il legame tra quaternioni ed EP:

$$\begin{aligned} q_0 &= \eta \\ q_1 &= \varepsilon_1 \\ q_2 &= \varepsilon_2 \\ q_3 &= \varepsilon_3 \end{aligned}$$

1.6 Sistema completo

Riassumendo quanto finora ricavato, possiamo vedere il nostro sistema nella forma:

$$\dot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{q}, \mathbf{u})$$

tipica dei sistemi non lineari. Non ci soffermiamo ora su chi sia il vettore degli ingressi \mathbf{u} , in quanto, a seconda della filosofia di controllo scelta, può essere formato dalle coppie agenti sui V.S.C.M.G. o dalle grandezze cinematiche degli stessi (si veda, per una panoramica completa, il capitolo 3 o, più brevemente, il paragrafo 2.1). Cosa certa è che il vettore dello stato è

quantomeno costituito da ω_b e σ , i due vettori 3×1 su cui il controllo deve agire. In definitiva il nostro sistema è governato dalle seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \left(\mathbf{J} + \sum \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T \right) \dot{\omega}_b + \sum Y_{g_j} \dot{\gamma}_j g_j + \sum I_{s_j}^w \dot{\Omega}_j s_j + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \dot{\gamma}_j t_j \\
 + \sum (Y_{s_j} - Y_{t_j}) \dot{\gamma}_j (t_j s_j^T + s_j t_j^T) \omega_b + \omega_b^x \left(\mathbf{J} + \sum \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T \right) \omega_b + & \text{Dinamica d'assetto del satellite} \\
 + \sum Y_{g_j} \dot{\gamma}_j \omega_b^x g_j + \sum I_{s_j}^w \Omega_j \omega_b^x s_j = g_b & \\
 \dot{\sigma} = G(\sigma) \omega_b & \text{Cinematica d'assetto del satellite} \\
 \hline
 \dot{K}_{g_j} = Y_{g_j} (\omega_b \cdot g_j + \dot{\gamma}_j) & \text{Dinamica dei giunti} \\
 \dot{K}_{g_j} + [(Y_{t_j} - Y_{s_j}) (\omega_b \cdot s_j) - I_{ws_j} \Omega_j] (\omega_b \cdot t_j) = G_j & \\
 \hline
 \dot{K}_{s_j} = I_{ws_j} (\omega_b \cdot s_j + \Omega_j) & \text{Dinamica delle ruote} \\
 \dot{K}_{s_j} = S_j &
 \end{array} \right. \quad (1.22)$$

1.7 Configurazione piramidale di V.S.C.M.G.

Abbandonando per un attimo il carattere di generalità finora mantenuto, descriviamo il *cluster* di V.S.C.M.G. che verrà utilizzato in questo lavoro. Ponendo $n = 4$, si considera un sistema di giunti con assi che giacciono nella mezzeria delle quattro facce laterali di una piramide regolare a base quadrata. θ è l'angolo di inclinazione delle facce rispetto alla base. Sia per l'elevata diffusione in letteratura, che ne fa un sistema estensivamente studiato, che per ovvie ragioni di simmetria e ridondanza, tale configurazione sarà utilizzata in questo lavoro di tesi:

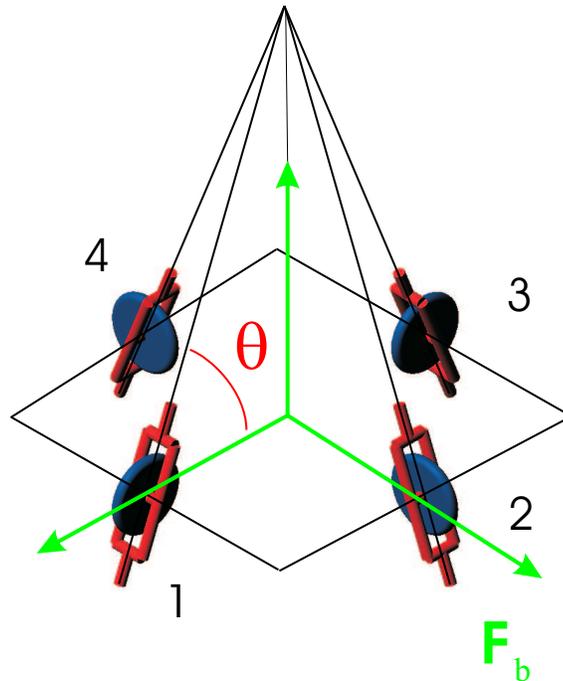


Figura 1.7: Configurazione piramidale di un sistema di V.S.C.M.G. e sua posizione iniziale rispetto alla terna corpo satellitare \mathcal{F}_b .

La figura riporta peraltro la configurazione presa a riferimento per la stima delle componenti dei versori della terna \mathcal{F}_j in \mathcal{F}_b . Osserviamo come lo spostamento del *cluster* all'interno del veicolo spaziale si traduca nella modifica della matrice \mathbf{J} : solo i vettori $\vec{\mathbf{b}}_j$ devono essere stimati di nuovo.

Capitolo 2

Stabilità: approccio alla Lyapunov

In questa sezione viene ricavata una relazione generale tra le variabili γ_j , Ω_j , lo stato satellitare e il segnale di guida. Tale legame si deduce imponendo la condizione di stabilità asintotica globale verso la traiettoria desiderata per lo stato che descrive la storia d'assetto del satellite. La relazione in questione sarà il punto di partenza per i due tipi di controllo illustrati nel capitolo 3.

2.1 Descrizione generale

L'obiettivo che ci si pone è quello di imporre la stabilità asintotica globale del sistema verso l'andamento desiderato, e tradurre questa imposizione in una relazione che generi un input di controlli (delle curve continue) per la dinamica della piattaforma satellitare. Con questo scopo, si è scelto di utilizzare un approccio molto comune in letteratura per i controlli non lineari, e cioè quello di imporre delle condizioni matematiche su una data funzione dello stato detta di *Lyapunov*. A tale proposito si fa riferimento al testo di *Slotine* [23]. Il sistema che stiamo prendendo in esame è descritto da un'Equazione Differenziale Ordinaria, di tipo vettoriale:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \quad (2.1)$$

dove \mathbf{f} è una funzione vettoriale dello stato q e del vettore degli ingressi u . Questo tipo di sistema non lineare viene definito **tempo invariante**, ad indicare la non dipendenza esplicita dal tempo (t compare solo per il tramite di \mathbf{q} e \mathbf{u}). Quello che ci chiediamo è se sia possibile determinare gli ingressi u affinché lo stato inseguia un andamento desiderato che chiameremo \mathbf{q}_d . Le varie strategie di controllo, reperibili in letteratura, vanno a scontrarsi contro l'estrema complessità della dinamica d'evoluzione dello stato, della sua estrema non linearità, e per questo risultano spesso incomplete, ristrette a casi più o meno particolari, e comunque vincolate ad ipotesi per cui si ha una perdita di generalità. Nello specifico del nostro problema le variabili in gioco sono le seguenti:

- ω σ (le quali devono inseguire gli andamenti desiderati)
- γ $\dot{\gamma}$ Ω (rappresentanti posizione e velocità delle ruote e giunti)

Si noti come le posizioni angolari delle ruote attorno ai relativi assi di spin (integrali delle Ω) non siano riportate in quanto ininfluenti per ragioni di simmetria. Dal punto di vista del controllo la velocità angolare e gli *MRP* devono essere ovviamente sempre inclusi nello stato (\mathbf{q}), mentre, per le restanti variabili, dipende dalla filosofia di progetto del *feedback*:

Velocity Based. In tal caso lo stato è ristretto a ciò che si intende controllare (σ e ω) e le variabili di controllo sono $\dot{\gamma}$ e $\dot{\Omega}$; si vedano a tal proposito [3], [13], [14] [2]... Avere dei motori in grado di controllare i giunti in velocità, dà il vantaggio di poter gestire giunti e ruote con una particolare filosofia che è la prerogativa dei *V.S.C.M.G.*.

Torque Based. Nell'intenzione di ottenere un approccio che sia del tutto generale, si è progettato un *feedback* in cui si assumono le coppie su ruote e giunti come controlli (u). Tale modello è stato sviluppato in collaborazione con l'Ingegnere *Dario Rocco Izzo*, come seguito al suo lavoro del settembre 2002 ([1]). In tal caso si includono tutte le variabili all'interno dello stato, fermo restando che ci interessa controllare solo le prime sei componenti scalari dello stesso (cioè il comportamento della piattaforma).

Acceleration Based. Ancora, lo stato è lo stesso del metodo *Velocity Based*, ma ora sono generate $\dot{\gamma}$ e $\dot{\Omega}$ come vettori di controllo. In letteratura ([3], [13], [14] et al.) viene descritto un tipo di approccio definito come *Acceleration Based* che in realtà ricalca le orme del *Velocity Based* senza risolvere nulla di nuovo rispetto a quest'ultimo. In realtà, un modo per generare le accelerazioni come variabili di controllo, tenendo da conto tutti i termini necessari alla stabilità (si veda ad esempio la 2.14), è tutt'altro che semplice. In un caso si ricade sostanzialmente nella legge *Torque Based* (coppie e accelerazioni sono legate algebricamente), mentre nell'altro si potrebbe cercare di restare fedeli all'ottima filosofia del *Velocity Based* generando un vettore dei controlli $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\dots, \dot{\mathbf{u}}, \dots)$, dunque funzione della sua derivata temporale. Ciò significherebbe un *feedback* derivativo sul segnale di controllo all'interno del controllore stesso. Questa operazione non è accettabile per un duplice motivo: nella realtà i derivatori numerici operano con un ritardo e quindi il segnale da essi generato risulta in un certo senso vecchio da utilizzare nel *loop* chiuso, inoltre le derivazioni sono amplificatori dei sempre presenti rumori dei sensori e dei vari dispositivi. Utilizzandoli all'interno dei modelli si pregiudicherebbero le loro future applicazioni in cui si voglia simulare la presenza di disturbi sui segnali.

In tutti e tre i casi la funzione di *Lyapunov* utilizzata rimane dello stesso tipo, e cioè dipendente solo dall'errore su σ e ω .

2.2 Funzione di Lyapunov

Definiamo un errore che indichi l'entità del discostamento tra il valore attuale dello stato e il valore desiderato. Per la velocità angolare definiamo il vettore $\omega_e = \omega - \omega_d$, che rappresenta sostanzialmente la velocità angolare relativa tra la terna attuale ed una terna fittizia (che si muove secondo il moto da noi desiderato), alla quale vogliamo quella attuale si sovrapponga.

Mentre, per l'errore sull'assetto, definiamo σ_e , quale il vettore di Parametri di Rodrigues Modificati (*MRP*) rappresentante una rotazione dalla terna attuale a quella desiderata. Ricordando le relazioni per la rappresentazione cinematica con gli *MRP*, si deduce facilmente la seguente:

$$\dot{\sigma}_e = \mathbf{G}(\sigma_e)\omega_e \quad (2.2)$$

La teoria sulla stabilità di *Lyapunov* richiede l'esistenza di una funzione scalare $V(\sigma_e, \omega_e)$ che:

- sia definita positiva sullo stato di un nuovo sistema, la cui evoluzione è data dall'errore sul tracking;
- sia radialmente illimitata;
- per la stabilità asintotica globale, abbia derivata prima temporale definita negativa.

La difficoltà, nella sintesi di sistemi di controllo non lineari, risiede proprio nella non esistenza di una teoria generale e, nello specifico, nella non esistenza di criteri del tutto universali per definire questa funzione. Per il problema che stiamo affrontando si è scelta una funzione comunemente utilizzata (a titolo di esempio si veda [2]). Si pone dunque:

$$V(\sigma_e, \omega_e) = \frac{1}{2}\omega_e^T (\mathbf{J} + \sum \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T) \omega_e + 2k_0 \ln(1 + \sigma_e^T \sigma_e) \quad (2.3)$$

Dove k_0 è una costante > 0 . Tale funzione è di certo definita positiva essendo composta da una parte quadratica in ω_e (essendo $\mathbf{J}_T = \mathbf{J} + \sum \mathbf{C}_j \mathbf{Y}_j \mathbf{C}_j^T$ una matrice di inerzia, è di certo definita positiva) e da un termine logaritmico (con argomento sempre ≥ 1) per l'errore sull'assetto. Inoltre è facile convincersi che risulta radialmente illimitata nello spazio di stato del sistema. A questo punto resta da imporre la condizione fondamentale per cui si ottiene stabilità. In particolare avere V con derivata sempre < 0 vuol dire che l'evoluzione è asintotica verso la condizione di errore nullo. Poniamo che sia:

$$\dot{V} = -\omega_e^T \mathbf{K} \omega_e \quad (2.4)$$

Con \mathbf{K} una matrice definita positiva in modo da imporre alla derivata di essere sempre definita negativa. Come osservato in [2], questa posizione garantisce stabilità asintotica su ω_e , ma è necessario provare che anche la parte di stato relativa all'assetto abbia un comportamento analogo. Infatti si nota come, per $\omega_e = 0$, \dot{V} risulti identicamente nulla e non si possa stabilire a priori quale sia l'andamento di σ_e . Condizione sufficiente, per includere nella stabilità asintotica dello stato anche σ_e , è che la prima derivata di ordine superiore, non nulla, valutata nel set di stati per cui $\dot{V} = 0$ (cioè $\omega_e = 0$), sia di ordine dispari e definita negativa. Per dimostrare questa asserzione deriviamo due volte \dot{V} :

$$\frac{d^2}{dt^2} V = -2\omega_e^T \mathbf{K} \dot{\omega}_e \quad (2.5)$$

Ancora:

$$\frac{d^3}{dt^3} V = -2\dot{\omega}_e^T \mathbf{K} \dot{\omega}_e - 2\omega_e^T \mathbf{K} \ddot{\omega}_e \quad (2.6)$$

Per valutare tale espressione nel caso in cui $\omega_e = 0$ deriviamo la funzione V a partire dalla 2.3:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\omega_e^T \mathbf{J}_T \omega_e + \omega_e^T \mathbf{J}_T \dot{\omega}_e + 2k_0 \frac{2\sigma_e^T}{1 + \sigma_e^T \sigma_e} \dot{\sigma}_e \quad (2.7)$$

Nota l'espressione 2.2 che lega σ_e a ω_e e notando che :

$$\sigma^T (\sigma^x + \sigma \sigma^T + \frac{1 - \sigma^T \sigma}{2} \mathbf{I}) = \sigma^T \sigma \sigma^T + \frac{1 - \sigma^T \sigma}{2} \sigma^T = \frac{1 + \sigma^T \sigma}{2} \sigma^T \quad (2.8)$$

la 2.7 si semplifica nella seguente:

$$\dot{V} = \omega_e^T (\frac{1}{2} \mathbf{J}_T \omega_e + \mathbf{J}_T \dot{\omega}_e + k_0 \sigma_e) \quad (2.9)$$

Uguagliando la 2.4 alla 2.9 e ricordando che:

$$\mathbf{J}_T = \sum (Y_{s_j} - Y_{t_j}) \dot{\gamma}_j (t_j s_j^T + s_j t_j^T) \quad (2.10)$$

si ricava:

$$-\mathbf{K} \omega_e = \mathbf{J}^T \dot{\omega}_e + \frac{1}{2} \sum (Y_{s_j} - Y_{t_j}) \dot{\gamma}_j (t_j s_j^T + s_j t_j^T) \omega_e + k_0 \sigma_e \quad (2.11)$$

Ricaviamo allora da quest'ultima, posto $\omega_e = 0$, che risulta $\dot{\omega}_e = -\mathbf{J}_T^{-1} k_0 \sigma_e$. Tornando alla 2.6, sempre per errore nullo sulla velocità angolare, per sostituzione si ottiene:

$$\frac{d^3}{dt^3} V = -k_0^2 \sigma^T (\mathbf{J}_T^{-1})^T \mathbf{K} \mathbf{J}_T^{-1} \sigma \quad (2.12)$$

quantità definita negativa in quanto sono definite positive le matrici \mathbf{J}_T e \mathbf{K} . Riportiamo, a conclusione di questa prefazione teorica sulla stabilità secondo il metodo di *Lyapunov*, dei grafici 3-D per meglio comprendere cosa significhi aver imposto le tre condizioni sopra illustrate per V . Prima, ricordando che il sistema trattato è tempo invariante, vediamo come valga:

$$\dot{V} = \frac{\delta V}{\delta \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{grad} V \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u})$$

La derivata prima temporale di V risulta negativa se sono di segno opposto le derivate (intese in senso vettoriale) di V rispetto allo stato e dello stato rispetto al tempo. La prima condizione si traduce, in un grafico funzione dello stato, in un andamento della V con concavità sempre verso l'alto e in particolare $\frac{\delta V}{\delta \mathbf{q}} < 0$ per valori dello stato negativi e viceversa (n -dimensionalmente parlando). Essendo infatti V sempre positiva, e nulla solo nell'origine dello spazio di stato, la condizione sulla sua derivata temporale non lascia alla funzione altre possibilità per il suo andamento (derivata negativa ovunque, nulla solo nell'origine). Per meglio comprendere queste affermazioni si immagini per semplicità uno stato unidimensionale. Quanto detto finora si tradurrebbe in una curva simile ad una parabola; se lo stato è < 0 la sua derivata è positiva, se è > 0 è negativa. Quindi lo stato converge all'origine. Per uno stato bidimensionale una V parabolica risulterebbe:

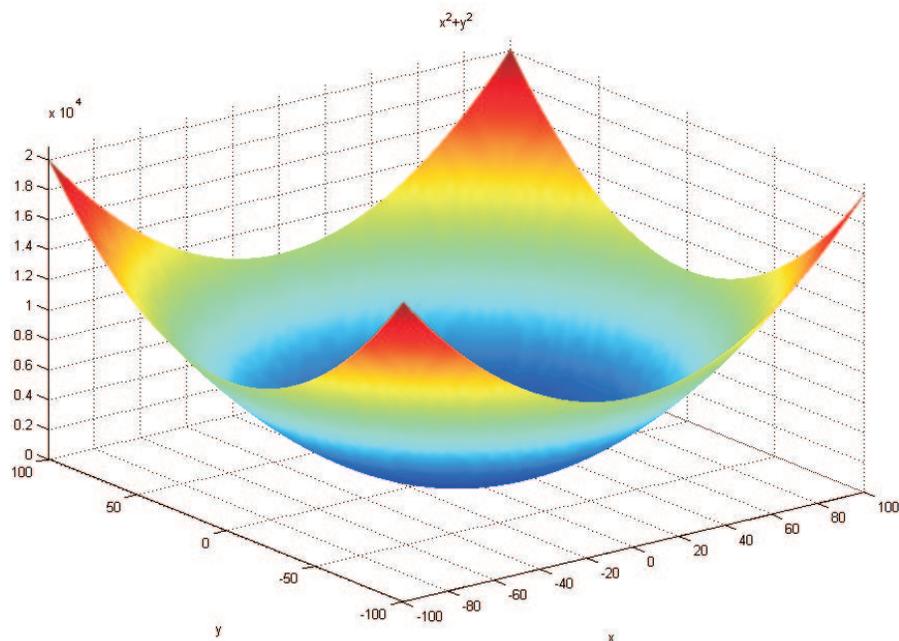
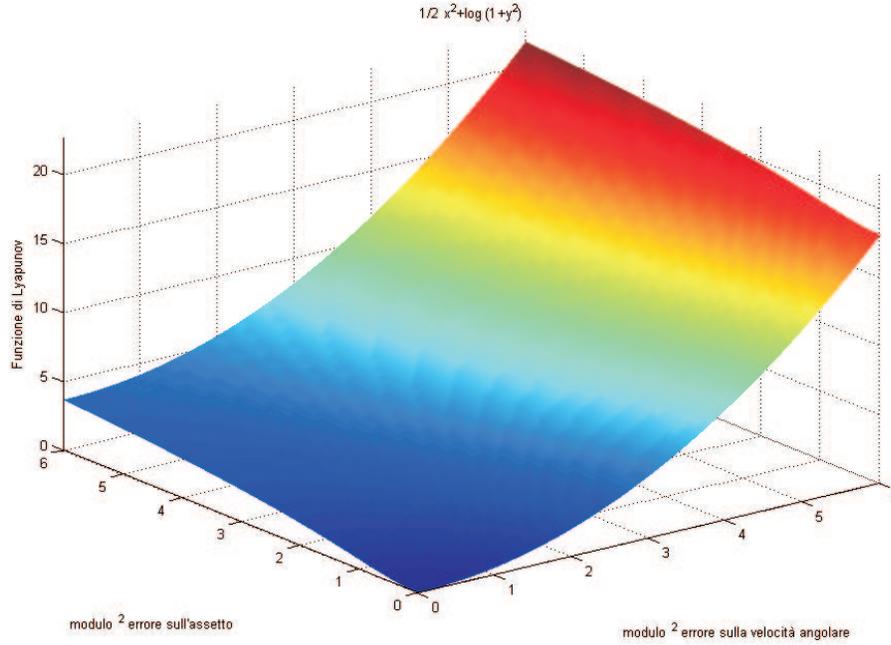


Figura 2.1: Esempio di andamento parabolico di V nello spazio di stato $2 - D$

Nello specifico della relazione 2.3 l'andamento tridimensionale è riportato nella figura seguente. Ovviamente lo stato, nel problema dei V.S.C.M.G. non è bidimensionale. Il grafico riporta la V in funzione dei moduli degli errori, per cui possiamo ridurci a parlare di una superficie $3 - D$. Lo stato evolve nel tempo e su questa superficie viene descritta una traiettoria che tende asintoticamente all'origine della terna.


 Figura 2.2: Andamento di V nello spazio di stato $2 - D$ per il problema dei V.S.C.M.G.

2.3 Relazione matriciale per la Stabilità

Ora risulta necessario stimare l'espressione a cui si è arrivati lungo lo stato del sistema, la cui evoluzione, per la parte della velocità angolare, è descritta dalla 1.6. In particolare si sostituisce $\dot{\omega}$ nella 2.11 osservando che $\dot{\omega}_e = \dot{\omega} - \dot{\omega}_d$. Con una serie di semplici passaggi algebrici si perviene alla relazione che devono soddisfare istante per istante $\ddot{\gamma}_j$, $\dot{\gamma}_j$ e Ω_j :

$$\begin{aligned} & \sum [\frac{1}{2}((Y_{s_j} - Y_{t_j})(t_j s_j^T + s_j t_j^T))(\omega + \omega_d) + I_{s_j}^w t_j \Omega_j + Y_{g_j} \omega^x g_j] \dot{\gamma}_j + \\ & + \sum I_{s_j}^v s_j \dot{\Omega}_j + \sum Y_{g_j} g_j \ddot{\gamma}_j = \\ & = \mathbf{K} \omega_e + k_0 \sigma_e - \mathbf{J}_T \dot{\omega}_d - \omega^x (\mathbf{J}_T \omega + \sum I_{s_j}^w s_j \Omega_j) + g_b \end{aligned} \quad (2.13)$$

che può alternativamente scriversi in forma matriciale, come si può leggere in [2], [8], [3] et al., facendo comparire i vettori $n \times 1$ che hanno per componenti le γ_j e le Ω_j :

$$\begin{aligned} & \mathbf{B} \ddot{\gamma} + \mathbf{C} \dot{\gamma} + \mathbf{D} \dot{\Omega} = \\ & = \mathbf{K} \omega_e + k_0 \sigma_e - \mathbf{J}_T \dot{\omega}_d - \omega^x (\mathbf{J}_T \omega + \sum I_{s_j}^w s_j \Omega_j) + g_b \end{aligned} \quad (2.14)$$

I significati delle matrici \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} sono i seguenti:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} | & | & | & | & \cdot & | \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & \cdot & g_n \\ | & | & | & | & \cdot & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{g_1} & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & Y_{g_2} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & Y_{g_3} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{g_4} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{g_n} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} = & \begin{pmatrix} | & | & | & | & \cdot & | \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \cdot & t_n \\ | & | & | & | & \cdot & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{s_1}^w & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & I_{s_2}^w & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & I_{s_3}^w & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{s_4}^w & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{s_n}^w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \Omega_2 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_3 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_4 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_n \end{pmatrix} + \\
 & + \omega^x \begin{pmatrix} | & | & | & | & \cdot & | \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & \cdot & g_n \\ | & | & | & | & \cdot & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{g_1} & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & Y_{g_2} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & Y_{g_3} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{g_4} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{g_n} \end{pmatrix} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} (t_1 s_1^T + s_1 t_1^T)(\omega + \omega_d) \\ \cdot \\ (t_n s_n^T + s_n t_n^T)(\omega + \omega_d) \\ \cdot \end{array} \right] \begin{pmatrix} Y_{s_1} & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & Y_{s_2} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & Y_{s_3} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{s_4} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{s_n} \end{pmatrix} - \\
 & - \begin{pmatrix} Y_{t_1} & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & Y_{t_2} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & Y_{t_3} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{t_4} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{t_n} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} | & | & | & | & \cdot & | \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \cdot & s_n \\ | & | & | & | & \cdot & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{s_1}^w & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & I_{s_2}^w & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & I_{s_3}^w & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{s_4}^w & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{s_n}^w \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Per semplicità si pone:

$$\mathbf{K}\omega_e + k_0\sigma_e - \mathbf{J}_T\dot{\omega}_d - \omega^x(\mathbf{J}_T\omega + \sum I_{s_j}^w s_j \Omega_j) + g_b = L_{rm} \tag{2.18}$$

dove L_{rm} risulta un vettore 3×1 e ha le dimensioni di una coppia. Pertanto sarà indicato come la **coppia richiesta** (Required Torque) che le γ e le Ω devono essere in grado di erogare istante per istante. Fin qui la trattazione generale che si può reperire (seppur con qualche variante o semplificazione) in letteratura. Dalla 2.14 o, equivalentemente, dalla 2.13 nasce la distinzione tra le modalità di controllo (scelta del vettore dei controlli) e ne verrà la critica alle approssimazioni che si trovano in [2], [8], [3] et al.. Prima di passare alla descrizione dettagliata dei vari metodi, illustrati per sommi capi nel paragrafo 2.1, si noti come la 2.14 sia un sistema di tre equazioni in n incognite (con $n \geq 4$, multiplo di 2; sostanzialmente l'andamento temporale di γ e Ω , nel caso siano scelte come controlli, che compaiono con le loro caratteristiche differenziali). Proprio tale sovrabbondanza di incognite permette, da un lato, di ipotizzare leggi di controllo integrate con sistemi di accumulazione e fornitura di energia tramite conversione da meccanica in elettrica e viceversa: **I.P.A.C.S.** (**I**ntegrated **P**ower/**A**ttitude **C**ontrol **S**ystem, si vedano [3], [9], [11],

[13], [14]) e ancora, metodi per controllare la velocità di rotazione delle ruote (Ω) tramite *wheel speed equalization* (citiamo [3]). Tali richieste si traducono in condizioni aggiuntive, per cui la 2.14 acquisisce delle equazioni in più (restando un sistema indeterminato). Per contro, la gestione di un così elevato numero di variabili, rende la scelta delle stesse problematica e quantomeno complessa. In questo lavoro l'obiettivo finale non comprenderà l'implementazione di controllori in grado di inseguire profili assegnati di *Power Tracking*, nè altre particolari condizioni accessorie, oltre all'inseguimento d'assetto. Ad ogni modo tale possibilità non è esclusa a priori, trattandosi sostanzialmente di apportare modifiche modeste all'algoritmo di controllo, e cioè aggiungere componenti a L_{rm} , modificando anche B , C e D .

Capitolo 3

Le leggi di controllo

Nel presente capitolo si svilupperanno i primi due tipi di controllo già citati nel paragrafo 2.1 e si descriveranno le problematiche relative al terzo. Nell’ottica della costruzione del *toolbox*, descritto nel successivo capitolo, specializzeremo da subito le relazioni per il caso della piramide costituita da 4 *V.S.C.M.G.*.

3.1 Velocity Based

3.1.1 Filosofia di controllo

Con uno sguardo alla letteratura più recente, sia per *V.S.C.M.G.* che per *C.M.G.* ([2], [3], [5], [8], [9], [13], articoli che vanno dal 1998 al 2001), si illustrerà il problema di controllare la piattaforma supponendo di poter agire direttamente sulle velocità angolari dei giunti e le accelerazioni ruote. E’ immediato comprendere come tale strategia risulti meno generale di quella riportata in 3.2, quantomeno da un punto di vista fisico. Dei motori elettrici andranno comunque ad applicare coppie sui giunti e le ruote; ciò non esclude l’esistenza di sistemi in grado di agire in maniera diretta su grandezze cinematiche, come illustrato da Tsiotras et al.([2]), ma almeno la stima di tali azioni è desiderabile da un punto di vista progettuale. In [2] si legge come, il controllare tramite le coppie, possa portare a valori inaccettabili per le grandezze γ e Ω e per i loro tassi di variazione. Tale affermazione, peraltro mai supportata in [2] (e in altri lavori) da esempi e prove numeriche, troverà un riscontro nelle simulazioni che seguiranno per il caso *Torque Based* nella versione qui implementata. Effettivamente il controllo genererà dei valori inaccettabili di x , γ e Ω , nonchè delle loro caratteristiche differenziali, a conferma del fatto che risulta preferibile poter agire in maniera diretta sulle grandezze cinematiche dei giunti cardanici, potendo pesare i valori delle stesse. Prima di passare alla trattazione matematica che porta al vettore dei controlli, ricordiamo la peculiarità dei sistemi *V.S.C.M.G.*. Si è già enfatizzato come la possibilità di variare Ω permetta di continuare a controllare anche in configurazioni dei giunti cardanici che risultano singolari. Per i semplici *C.M.G.* si è obbligati a generare *feedback* che tengano il sistema lontano dalle suddette configurazioni ([5], [6], [8]), per evitare che lo sforzo di controllo vada a cadere tutto sui termini che contengono $\ddot{\gamma}$. Nei *V.S.C.M.G.* tale problema è superato avendo dei gradi di libertà aggiuntivi, e cioè le $\dot{\Omega}$. La filosofia *Velocity Based* si basa

quindi su una logica di controllo che ricalca quella dei *C.M.G.* ma senza la preoccupazione di evitare le singolarità. Nel momento in cui viene raggiunta una configurazione singolare, non si farà altro che azionare i motori di *spin* e permettere alle *wheels* di accelerare, continuando in tal modo a soddisfare la condizione di stabilità 2.14. Da un punto di vista fisico si è già spiegato come una configurazione singolare si ha quando gli assi trasversi sono tutti paralleli ad uno stesso piano, mentre la coppia richiesta è un vettore al di fuori di tale piano. In tal caso un *C.M.G.* opererebbe sforzando sulle $\dot{\gamma}$ (se non ci fosse una logica che gli impedisca di avvicinarsi a tale configurazione), cosa indesiderabile in quanto porterebbe a valori di accelerazione molto elevati. Tali affermazioni si giustificano più rapidamente dando uno sguardo alla 2.14 scritta per un sistema *C.M.G.* ($\dot{\Omega} = 0$):

$$\mathbf{B}\ddot{\gamma} + \mathbf{C}\dot{\gamma} = L_{rm} \quad (3.1)$$

o equivalentemente alla 2.13, sempre per *C.M.G.*:

$$\begin{aligned} & \sum \left[\frac{1}{2} ((Y_{s_j} - Y_{t_j})(t_j s_j^T + s_j t_j^T)) (\omega + \omega_d) + I_{s_j}^w t_j \Omega_j + Y_{g_j} \omega^x g_j \right] \dot{\gamma}_j + \\ & + \sum Y_{g_j} g_j \ddot{\gamma}_j = L_{rm} \end{aligned} \quad (3.2)$$

nel caso in cui la matrice \mathbf{C} si abbassa di rango, o si avvicina a tale condizione, entra in gioco il termine in $\ddot{\gamma}$. Essendo \mathbf{B} composta da termini numericamente modesti (si veda la 2.15, l'inerzia dei giunti rispetto ai propri assi è molto bassa), $\ddot{\gamma}$ esplose, numericamente parlando. Si noti come la condizione di singolarità possa dedursi dalla 3.2 o dalla 1.9. In ambedue i casi si traduce in valori elevati di $\ddot{\gamma}$, come è logico che sia. La filosofia *Velocity Based* controlla la piattaforma tramite i vettori $\dot{\gamma}$ e $\dot{\Omega}$. Il tutto si comporta seguendo tale logica:

- Lontano da configurazioni singolari la piramide di controllo si comporta come un semplice *C.M.G.*. Sfrutta l'effetto di *Amplification Torque* senza variare in maniera sostanziale le velocità delle ruote.
- L'approcciare di una configurazione singolare innesca l'ausilio del *Variable Speed*.

Introduciamo il parametro $\delta = \det([\mathbf{C}][\mathbf{C}^T])$ quale indicatore di quanto ci si trovi in prossimità della singolarità. Altri tipi di criteri, e quindi definizioni alternative di δ , possono reperirsi in letteratura ([3]). Quanto più ci si avvicina a tale situazione, tanto più δ si avvicina a zero. A questo punto, nei lavori di Tsiotras et al. ([2]) viene operata la semplificazione del termine in $\ddot{\gamma}$ dalla 2.14, ritenendolo tipicamente trascurabile. V'è osservato come la 2.14 risulta di difficile risoluzione nel caso in cui si vogliono tenere da conto tutti i termini. Difatti il legame differenziale tra $\dot{\gamma}$ e $\ddot{\gamma}$ fa della 2.14 un'equazione integrale implicita. Trascurare invece il termine in derivata seconda permette di generare $\dot{\gamma}$ e $\dot{\Omega}$ in maniera più agevole, non essendoci nessun legame tra i due vettori, tranne quello da noi imposto con la logica di controllo. Per ricavare il controllore (di dimensione 8×1) si deve soddisfare un vincolo:

$$\mathbf{C}\dot{\gamma} + \mathbf{D}\dot{\Omega} = L_{rm} \quad (3.3)$$

In forma più compatta, definito il vettore dei controlli:

$$\eta = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\Omega}_2 \\ \dot{\Omega}_3 \\ \dot{\Omega}_4 \\ \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_3 \\ \dot{\gamma}_4 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e posto $\mathbf{Q} = [D|C]$ (8×8), si ha:

$$\mathbf{Q}\eta = L_{rm} \quad (3.5)$$

Come è noto, in qualsiasi problema di simulazione di controllo di un sistema dinamico, risulta estremamente sconsigliabile l'utilizzo di operatori di derivazione numerica. Questo lavoro si pone l'obiettivo di criticare la legge di controllo *Velocity Based*, di implementarla accanto alla nuova *Torque Based*, e di indicare la strada futura per ulteriori ricerche sull'argomento. Dunque, nell'ambito di questa tesi, non vengono tenuti in conto fenomeni tipici e sempre presenti, nel momento in cui si voglia passare ad una fase successiva di progettazione: rumori e disturbi. I modelli costruiti saranno privi di simulatori di sensori e di generatori di rumore. Al fine di costruire un prodotto che possa essere punto di partenza per simulazioni sempre più complete, e nel quale quindi possano essere introdotte sorgenti di rumore, si è scelto di seguire la già citata regola, che in un certo senso vieta l'utilizzo di derivazioni numeriche in un modello di controllo. Si pensi a come un segnale *random* di rumore, soprattutto se ad alta frequenza, possa essere amplificato dalla presenza di un derivatore, il tutto pregiudicando completamente la simulazione. Il problema intrinseco di questa trattazione risiede proprio nell'aver deliberatamente trascurato il termine di accelerazione dei giunti. Se volessimo tenere in conto tutti i termini necessari al processo che si intende controllare, sarebbe necessario derivare una parte del vettore dei controlli generato dal *feedback*. Non potendo però utilizzare tale tecnica, se non pregiudicando applicazioni future del modello (con rumori, ecc.), si deve necessariamente approssimare la dinamica della piattaforma, trascurando anche in essa le $\ddot{\gamma}$. In realtà la motivazione per cui si sceglie di non derivare numericamente è duplice: in una simulazione di *closed loop* un eventuale derivatore numerico non può far altro che operare con un ritardo per stimare il tasso di variazione della variabile a cui è applicato. Così facendo genera un segnale che in realtà è già vecchio e teoricamente inutilizzabile per una qualsivoglia dinamica all'interno del modello. Questo in quanto non possiamo conoscere l'andamento futuro dei segnali: stiamo integrando passo-passo! Come è facile immaginare il nuovo modello risulterà teoricamente perfetto: la stessa approssimazione è stata operata per il controllore come per il processo!!! L'approssimazione può andar bene per un buon numero di manovre ma nulla garantisce la generalità (e ancor meno il peso) di questa posizione. Quello che ci si chiede, e che a questo punto è lecito pensare, è come si possa stabilire, soprattutto nella letteratura al riguardo, che le $\ddot{\gamma}$ siano trascurabili. Solo l'inserimento di derivatori può confortare tale approssimazione, stima che peraltro dovrebbe essere operata per ogni tipo di manovra. Questa scelta probabilmente è stata operata

dagli autori che hanno lavorato sui *V.S.C.M.G.*, ma mai viene apertamente indicata. In sostanza si può pensare di usare il derivatore a valle del segnale $\dot{\gamma}$ e vedere se nella simulazione in questione $\ddot{\gamma}$ sia effettivamente molto modesto. Il tutto si colloca nella realtà ideale di assenza di rumori. Forti del risultato della derivazione allora si può passare alla dinamica semplificata. Ma se il risultato non è ciò che si spera? Non si accenna minimamente a tale possibilità, in nessuno degli articoli citati. Nella sfortunata eventualità, nulla può dirsi tranne che, il controllore *Velocity Based*, a bordo di una piattaforma reale, darebbe comportamenti di non stabilità asintotica globale. E' lecito supporre che esistano delle manovre, o quantomeno fasi di queste, in cui le $\ddot{\gamma}$ non sono poi così modeste (nonostante la legge di controllo, che cerca di non utilizzare assolutamente tale termine) da poter essere omesse dalla relazione matriciale per la stabilità. Tenendo a mente la realtà fisica, quello che ci si può aspettare è che, un satellite reale, equipaggiato con *V.S.C.M.G.* gestiti in *Velocity Based*, si comporti in modo indesiderato, almeno negli intervalli di tempo in cui $\ddot{\gamma}$ è elevato. D'altronde, un vettore $\dot{\gamma}$ variabile, porta con sé un $\ddot{\gamma} \neq 0$, che, se omesso dalla relazione di stabilità, come è obbligatorio fare per il *Velocity Based*, comunque ha influenza sulla dinamica della piattaforma. Con uno sguardo alla relazione 2.14 possiamo affermare che, a parità di manovra e di dati strutturali, avere velocità angolari delle ruote più elevate può essere un modo per cercare di evitare che le $\ddot{\gamma}$ crescano indesideratamente. In questa maniera si cerca di soddisfare la richiesta di coppia con l'effetto di amplificazione dei *C.M.G.*. In configurazioni singolari però, è facile aspettarsi che comunque le $\ddot{\gamma}$ siano più elevate che nel resto della manovra. Un semplice ragionamento su quanto finora detto porta alla logica conclusione che la stretta monotonia della funzione di *Lyapunov* non può in tal modo essere garantita a priori su tutte le manovre. Nel presente lavoro si cercherà di stimare l'entità dell'approssimazione che si opera, manovra per manovra, seguendo i seguenti criteri:

- Si lancia la simulazione in cui si trascurano le accelerazioni dei giunti.
- Alla fine di questa si avranno degli *array* di punti a rappresentare la storia temporale delle variabili in gioco; tra essi il vettore dei controlli $\dot{\gamma}$.
- Ora che conosciamo il grafico delle velocità dei giunti possiamo pensare di operare una derivazione numerica, con il solo scopo di stimare dei valori a rappresentare le accelerazioni dei giunti (senza usare tali segnali altrove).
- Fissare un parametro indicativo dell'entità dell'approssimazione. Si sceglie il seguente parametro:

$$\alpha = \frac{\sum Y_{g_j} \ddot{\gamma}_j^2}{|L_{rm}|} \quad (3.6)$$

Risulta sempre $\sum Y_{g_j} \ddot{\gamma}_j^2 \geq |\sum Y_{g_j} g_j \dot{\gamma}_j|$, per cui si dà una stima per eccesso del termine in $\ddot{\gamma}$. Se tale rapporto risulta al di sotto di una prefissata tolleranza (in questa sede si è scelta pari ad $\frac{1}{10}$, ma nulla vieta una diversa posizione) stabiliamo di ritenere accettabile l'approssimazione operata.

Il problema numerico che nasce in questo tipo di controllo, e l'osservazione, che ci possano essere senz'altro manovre per cui il *feedback* non garantisce andamenti *smooth* dello stato del

sistema, porterà alla ricerca di una trattazione più generale, quale quella del *Torque Based* nella versione qui riportata.

Ricavare il vettore η dei controlli richiede, a questo punto, delle condizioni in più, avendo un sistema con ∞^5 soluzioni. Tali condizioni possono ricavarsi attraverso la risoluzione di un problema di minimo vincolato come mostrato nel paragrafo successivo.

3.1.2 Problema di minimo vincolato per il Velocity Based

Definita la matrice \mathbf{W} come:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_{s_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{s_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_{s_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_{s_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_{g_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{g_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{g_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{g_4} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

I W_{g_i} sono costanti a discrezione del *control designer*, $W_{s_i} = W_{s_i}^0 e^{-\mu\delta}$, con $W_{s_i}^0$ delle costanti, come anche μ , mentre δ è stato definito nel paragrafo precedente. Questa scelta può giustificarsi a posteriori: il vettore ottenuto risulterà seguire la metodologia di controllo propria del *Velocity Based*. Procediamo alla minimizzazione della funzione (si veda [3]):

$$h(\eta) = \frac{1}{2} \eta^T \mathbf{W}^{-1} \eta \quad (3.8)$$

Il problema risulterà del tipo:

$$\begin{cases} \min[h(\eta)] \\ \mathbf{Q}\eta = L_{rm} \quad (\text{vincolo}) \end{cases} \quad (3.9)$$

Come è noto è necessario introdurre una *funzione aumentata* di *Lagrange*. Definito il vettore 3×1 dei moltiplicatori di *Lagrange* $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$, risulta:

$$f(\eta) = \frac{1}{2} \eta^T \mathbf{W}^{-1} \eta + \lambda^T (\mathbf{Q}\eta - L_{rm}) \Rightarrow \min. \quad (3.10)$$

Il problema viene risolto dai vettori η e λ che soddisfino le:

$$\begin{cases} \frac{dh}{d\eta} = 0 \\ \frac{dh}{d\lambda} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Tali derivate danno, rispettivamente:

$$\begin{cases} \frac{dh}{d\eta} = \mathbf{W}^{-1}\eta + \mathbf{Q}^T\lambda \\ \frac{dh}{d\lambda} = \mathbf{Q}\eta - T \end{cases} \quad (3.12)$$

Imponendo a tali derivate la condizione 3.11 ricaviamo η dalla prima:

$$\eta = -\mathbf{W}\mathbf{Q}^T\lambda \quad (3.13)$$

sostituendo nella seconda:

$$\lambda = -(\mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T)^{-1}L_{rm} \quad (3.14)$$

che infine, risostituita nella prima, permette di ottenere il vettore dei controlli η :

$$\eta = \mathbf{W}\mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T)^{-1}L_{rm} \quad (3.15)$$

L'espressione così ottenuta non necessita modifiche ulteriori, e sarà implementata nel paragrafo relativo alle simulazioni numeriche. Si noti come le ruote non vengano accelerate ($\dot{\Omega} \simeq 0$) fintanto che δ è lontano dal valore zero. In prossimità di configurazioni singolari ($\delta \simeq 0$) i pesi relativi alle accelerazioni angolari delle ruote non sono più trascurabili e si aziona la modalità *R.W.*, che sopperisce alla incapacità di erogare coppia. Sottolineiamo anche come sia possibile simulare sistemi di controllo più semplici, quali i *C.M.G.* e le *R.W.*, basta infatti scegliere il parametro μ sufficientemente elevato in modo da annullare $\dot{\Omega}$ (per simulare i *C.M.G.*), oppure invertire le $\dot{\Omega}$ con le $\dot{\gamma}$, sempre con μ di valore molto alto, per simulare le *R.W.*

3.2 Torque Based

3.2.1 Relazione matriciale con le coppie

Partendo dalla 1.14 e dalla 1.15 ricaviamo un legame diretto tra le componenti γ_j del vettore γ e le componenti lungo gli assi di gimbal delle coppie scambiate tra piattaforma e giunti cardanici (G_j) (in particolare tali proiezioni sugli assi g_j sono le coppie erogate dagli attuatori del sistema di controllo). Allo stesso modo leghiamo le Ω_j con le coppie S_j che i motori di spin esercitano sulle ruote. Derivando la prima delle 1.14 si ha:

$$\dot{K}_{g_j} = Y_{g_j}(\dot{\omega} \cdot g_j + \omega \cdot \dot{g}_j + \ddot{\gamma}_j) \quad (3.16)$$

essendo:

$$g_j = \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ne segue che:

$$\dot{g}_j = \dot{\mathbf{C}}_j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_j \omega_j^x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\gamma}_j \\ 0 & \dot{\gamma}_j & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Perciò:

$$\dot{K}_{g_j} = Y_{g_j}(\dot{\omega} \cdot g_j + \ddot{\gamma}_j) \quad (3.19)$$

Sostituendo nella seconda delle 1.14, ed esplicitando $\ddot{\gamma}_j$, si ottiene:

$$\ddot{\gamma}_j = \frac{G_j - [(Y_{t_j} - Y_{s_j})(\omega \cdot s_j) - I_{s_j}^w \Omega_j](\omega \cdot t_j) - Y_{g_j} \dot{\omega} \cdot g_j}{Y_{g_j}} \quad (3.20)$$

Per quanto riguarda la dinamica delle ruote, dalla derivazione della prima delle 1.15 si ha:

$$\dot{K}_{s_j} = I_{s_j}^w(\dot{\omega} \cdot s_j + \omega \cdot \dot{s}_j + \dot{\Omega}_j) \quad (3.21)$$

Anche in tal caso osserviamo che:

$$s_j = \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

per cui:

$$\dot{s}_j = \dot{\mathbf{C}}_j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_j \omega_j^x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\gamma}_j \mathbf{C}_j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{\gamma}_j t_j \quad (3.23)$$

e ancora:

$$\dot{K}_{s_j} = I_{s_j}^w(\dot{\omega} \cdot s_j + \omega \cdot t_j \dot{\gamma}_j + \dot{\Omega}_j) \quad (3.24)$$

In tal caso la sostituzione nella seconda delle 1.15 risulta banale e porta, ricavando $\dot{\Omega}_j$, a:

$$\dot{\Omega}_j = \frac{S_j}{I_{s_j}^w} - \dot{\omega} \cdot s_j - \omega \cdot t_j \dot{\gamma}_j \quad (3.25)$$

Al fine di esprimere la relazione 2.13 in funzione dei vettori \mathbf{G} ed \mathbf{S} delle coppie, sostituiamo nella stessa le 3.20 e le 3.25. Lasciando a primo membro solo i suddetti vettori si perviene alla seguente:

$$\begin{aligned} & \sum g_j G_j + \sum s_j S_j = \\ & = \sum [[(Y_{t_j} - Y_{s_j})(\omega \cdot s_j) - I_{s_j}^w \Omega_j](\omega \cdot t_j) + Y_{g_j} \dot{\omega} \cdot g_j] g_j + \\ & - \sum \left[\frac{1}{2} ((Y_{s_j} - Y_{t_j})(t_j s_j^T + s_j t_j^T)) (\omega + \omega_d) + Y_{g_j} \omega^x g_j + I_{s_j}^w \Omega_j t_j \right] \dot{\gamma}_j + \\ & + \sum [I_{s_j}^w (\dot{\omega} \cdot s_j) + I_{s_j}^w (\omega \cdot t_j) \dot{\gamma}_j] s_j + \\ & + \mathbf{K} \omega_e + k_0 \sigma_e - \mathbf{J}_T \dot{\omega}_d - \omega^x (\mathbf{J}_T \omega + \sum I_{s_j}^w s_j \Omega_j) + g_b \end{aligned} \quad (3.26)$$

Per ovvi motivi di leggibilità chiameremo tutto il secondo membro della 3.26 con T , e cioè la *Required Torque* nell'approccio **Torque Based** (come nella 2.18 è immediato convincersi che il secondo termine è dimensionalmente una coppia e ancora un vettore 3×1). In definitiva la condizione da soddisfare per la stabilità, con questo cambiamento di variabili, risulta, in forma compatta:

$$\mathbf{A}x = T(\omega, \dot{\omega}, \sigma, \omega_d, \dot{\omega}_d, \sigma_d, g_b, \dot{\gamma}, \gamma, \Omega) \quad (3.27)$$

avendo indicato con:

$$x = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

vettore 8×1 con componenti le coppie su gimbals e wheels.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | & | & | & | \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ | & | & | & | & | & | & | & | \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

matrice 3×8 che ha per colonne i versori s_j e g_j , componenti degli assi di spin e di gimbal nel riferimento della piattaforma. Ancora un sistema costituito da tre equazioni in otto incognite. Di nuovo, *Lagrange* ci viene in aiuto.

3.2.2 Problema di minimo vincolato per il Torque Based

Definita la matrice \mathbf{H} come:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \Omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\gamma}_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\gamma}_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\gamma}_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\gamma}_4^2 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

scegliamo come funzione da minimizzare la seguente:

$$h(x) = \frac{1}{2} x^T \mathbf{H} x \quad (3.31)$$

la quale, per esteso, risulta una somma di quadrati di prodotti tra le coppie e le relative velocità degli elementi su cui agiscono; i termini che compongono h sono sostanzialmente i quadrati delle potenze richieste ai motori, che accelerano *gimbals* e *wheels*. Il problema risulterà del tipo:

$$\begin{cases} \min[h(x)] \\ \mathbf{A}x = T \end{cases} \quad (\text{vincolo}) \quad (3.32)$$

Come fatto nel caso precedente, definito il vettore 3×1 dei moltiplicatori di *Lagrange* $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$, risulta:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T \mathbf{H}x + \lambda^T (\mathbf{A}x - T) \Rightarrow \min. \quad (3.33)$$

Il problema viene risolto dai vettori x e λ che soddisfino le:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dx} = 0 \\ \frac{dh}{d\lambda} = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Tali derivate danno, rispettivamente:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dx} = \mathbf{H}x + \mathbf{A}^T \lambda \\ \frac{dh}{d\lambda} = \mathbf{A}x - T \end{cases} \quad (3.35)$$

Imponendo a tali derivate la condizione 3.34 ricaviamo x dalla prima:

$$x = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}^T \lambda \quad (3.36)$$

sostituendo nella seconda:

$$\lambda = -(\mathbf{A} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} T \quad (3.37)$$

che infine, risostituita nella prima, permette di ottenere il vettore dei controlli x :

$$x = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} T \quad (3.38)$$

ad ogni istante di tempo si è quindi in grado di generare il vettore delle coppie, valutando le matrici \mathbf{H} e \mathbf{A} e la *Required Torque* T . Il significato della funzione h che si è minimizzata è stato già illustrato, ma tuttavia, l'applicabilità della relazione 3.38 cade in difetto molto facilmente nel momento in cui si abbia uno *zero crossing* da parte di una sola delle velocità angolari che compongono \mathbf{H} . Difatti viene a mancare l'invertibilità della suddetta matrice, essendo la stessa diagonale. Per aggirare il problema si è pensato di modificare \mathbf{H} aggiungendo degli 1 ad ogni velocità angolare; essendo i termini al quadrato, ciò garantisce l'invertibilità incondizionata della matrice.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \Omega_1^2 + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_3^2 + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_4^2 + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\gamma}_1^2 + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\gamma}_2^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\gamma}_3^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\gamma}_4^2 + 1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Il vettore x resta rappresentato dalla stessa espressione 3.38 e il significato fisico di h in realtà non subisce modifiche concettuali, anche se si perde lo stretto legame con l'idea della minimizzazione della potenza. Tale modifica porta ad un algoritmo robusto in grado di lavorare senza problemi di singolarità.

3.3 Acceleration Based

In [2] viene proposta una legge di controllo definita come *Acceleration Based*, che in realtà genera i vettori $\ddot{\gamma}$ e $\dot{\Omega}$ in modo da far comportare il sistema come accade per il *Velocity Based*, con tutte le problematiche che ne derivano. In sostanza nulla cambia rispetto al caso del paragrafo 3.1.2. Osservando gli andamenti riportati in [2] si notano delle differenze tra il modello che genera $\dot{\gamma}$ e quello che genera $\ddot{\gamma}$ solo per la fase iniziale e solo nel caso in cui i *gimbals* non si trovino nella configurazione assegnata all'istante iniziale dalla 3.15. Ad ogni modo, dopo un transitorio, le grandezze evolvono identicamente al caso *Velocity Based*. Per i dettagli di tale metodologia (il cui scopo è solo di shiftare l'attenzione su un diverso vettore di controlli, senza apportare nessuna modifica alla filosofia dell'approssimazione operata) si rimanda a tale lavoro. Per generare un controllo che si possa a rigore chiamare *Acceleration Based* dovrebbe risolversi la condizione 2.14, che può scriversi alternativamente:

$$\mathbf{B}\ddot{\gamma} + \mathbf{C} \dot{\gamma} + \mathbf{D}\dot{\Omega} = L_{rm} \quad (3.40)$$

A questo punto si possono percorrere due strade; una, che potrebbe apparire molto attraente, è purtroppo un vicolo cieco!

1. Ponendo $\ddot{\gamma} = x$ e $\dot{\gamma} = y$ e minimizzando ancora la 3.8 il sistema risultante sarà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min[\frac{1}{2}\eta^T \mathbf{W}^{-1}\eta] \\ \mathbf{B}x + \mathbf{C}y + \mathbf{D}\dot{\Omega} = L_{rm} \quad (\text{vincolo}) \\ x = \dot{y} \end{array} \right. \quad (3.41)$$

In tal modo sembrerebbe che si sia risolto il problema nella maniera più generale possibile, tenendo da conto tutti i termini a garanzia della stabilità, continuando peraltro a mantenere il comportamento vantaggioso del *Velocity Based*. In realtà, mantenere $\dot{\gamma}$ in η significa non poter prescindere da un ideale *feedback* derivativo all'interno del controllore. η risulterà funzione della sua derivata, cosa inapplicabile nella realtà fisica (non esistono dispositivi in grado di prevedere il comportamento futuro di un segnale e quindi darne la derivata!) e peraltro pericoloso da un punto di vista progettuale per il sempre presente problema dei rumori.

2. Si sceglie η in modo che vi compaia $\ddot{\gamma}$ invece che $\dot{\gamma}$. Il sistema resta lo stesso. Senza soffermarsi su come si possa scegliere la matrice dei pesi, notiamo da subito come ora sia realizzabile un *feedback* di tipo integrale (dispositivo fisicamente realizzabile; per integrare basta la storia passata del segnale). Come è logico aspettarsi poco cambia rispetto al *Torque Based*. Tra accelerazioni e coppie non c'è una differenza così sostanziale da modificare drasticamente il controllo.

Capitolo 4

V.S.C.M.G. Toolbox, V2.0

Verranno ora descritti la tecnica e gli strumenti **Matlab**[©] e **Simulink**[©], impiegati per la costruzione di simulazioni numeriche di controllo d'assetto, tramite la piramide descritta nel cap. 1. Come in tutti i lavori, riguardanti il tipo di attuatori che in questa sede stiamo trattando, si prenderanno in considerazione sistemi simmetrici di *V.S.C.M.G.*. Il numero di dispositivi sarà > 2 , garantendo un discreto livello di ridondanza (i sistemi *V.S.C.M.G.* sono sempre ridondanti, dal punto di vista delle variabili di controllo, anche nel caso di $n = 2$, al di sotto del quale la piattaforma non è controllabile). In particolare la *toolbox* di seguito descritta prende in considerazione configurazioni generiche di piattaforma e piramide, l'ultima delle quali può essere centrata ovunque all'interno del veicolo. La scelta di tale mezzo, ed in particolare del *tool Simulink*[©], si giustifica notando come l'implementazione di modelli di sistemi dinamici risulti estremamente rapida. **Simulink**[©] nasce proprio come strumento principe per la riproduzione di una gamma la più disparata possibile di modelli matematici. La rapidità con cui si possono assemblare operatori matematici (integratori, funzioni, ecc.) per costruire un'equazione complessa, l'interfaccia grafica che si avvale di frecce per indirizzare i segnali da un operatore all'altro, e tantissime altre peculiarità, fanno di questo **Matlab**[©] *tool* un dispositivo matematico estremamente potente e con il vantaggio di essere relativamente *user friendly*. Importante risulta anche il vantaggio di poter operare con matrici e vettori in modo alquanto intuitivo, sia in **Matlab**[©] che in **Simulink**[©]. Infine, ma non meno importante, la possibilità di implementare *Blocks*, e cioè dei veri e propri blocchi (visivamente parlando), con uscite e ingressi, da poter collegare ad altri corpi del modello **Simulink**[©]. Tali blocchi possono racchiudere a loro volta altri blocchi (*subsystems*) tra loro assemblati, e così avanti fino ad arrivare agli operatori matematici che compongono ogni singolo *subsystem*. L'ausilio di maschere (*masks*) permette poi di inserire i parametri che sono a discrezione dell'utente, caso per caso, dando anche una descrizione dello scopo per il quale è stato progettato il blocco selezionato. Si ottiene così un programma di alto livello, dal punto di vista dell'utente che deve simulare un qualsivoglia problema. La filosofia che si è seguita, al fine della costruzione della **V.S.C.M.G. Toolbox, V2.0**, sfrutta tutte le caratteristiche illustrate finora.

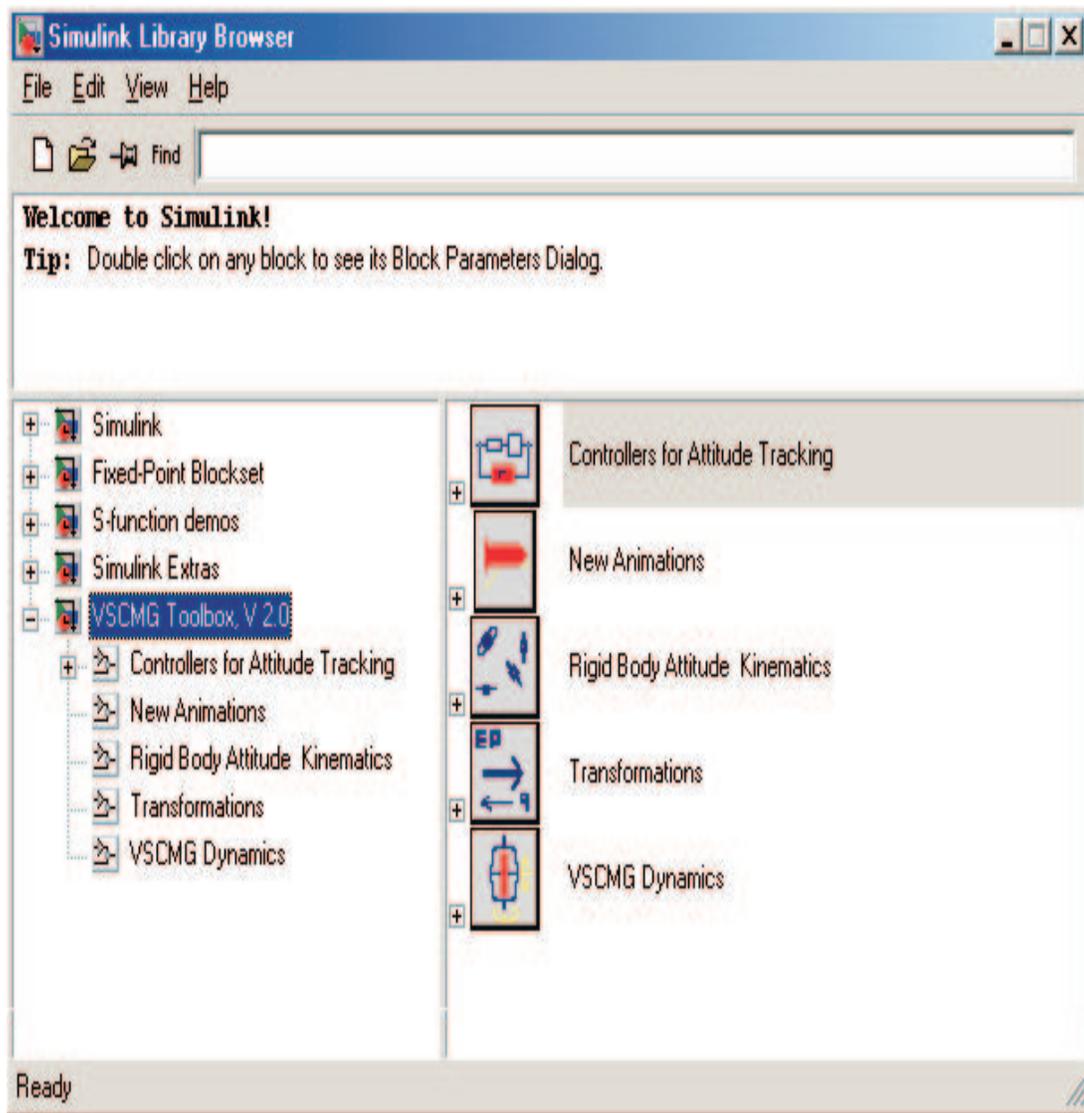


Figura 4.1: Visualizzazione *browser* per accedere alla **V.S.C.M.G. Toolbox, V2.0**

La figura precedente riporta la visualizzazione della *toolbox* tra le varie librerie **Simulink**[©].

4.1 Librerie: generalità

V.S.C.M.G. Toolbox, V2.0 è costituita da 5 sottosistemi principali:

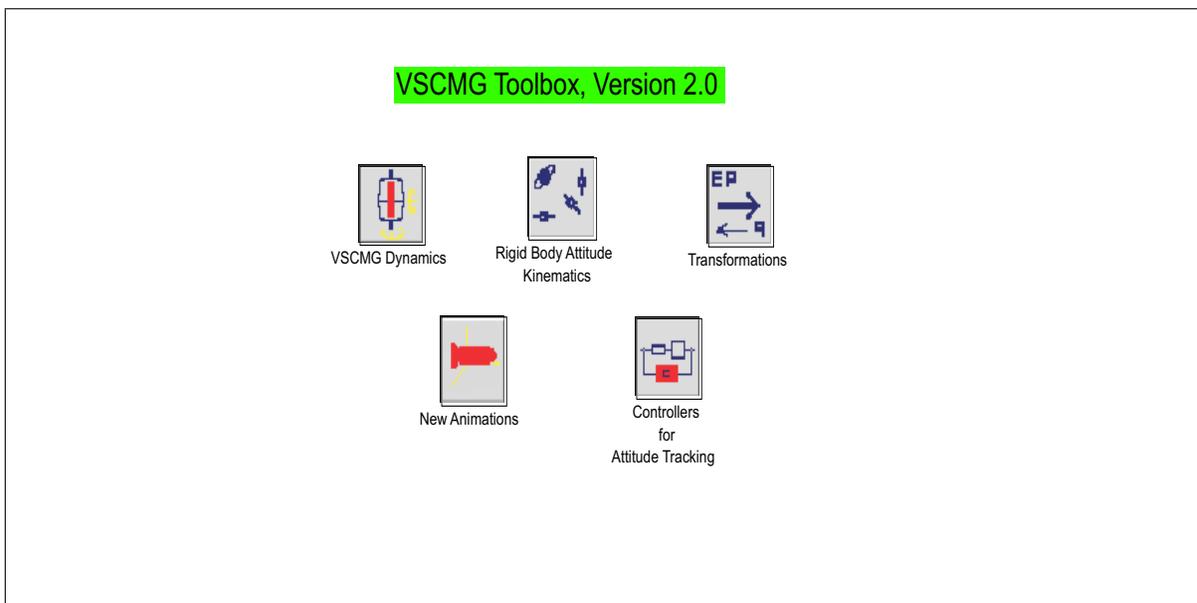


Figura 4.2: V.S.C.M.G. Toolbox, V2.0

VSCMG Dynamics Consta di blocchi relativi alla dinamica del satellite equipaggiato di V.S.C.M.G., alla dinamica di questi ultimi (per la prima sia in fase operativa che di *Failure Mode*) e di elementi accessori per la stima delle coppie erogate dai motori di giunti e ruote. Compare anche un blocco risolvete le eqq. di *Eulero*, che comunque non sarà utilizzato per il presente lavoro.

Rigid Body Attitude Kinematics Integra le equazioni cinematiche del moto d'assetto di un generico corpo rigido. Tre rappresentazioni vengono prese in considerazione:

- Parametri di *Eulero*
- Parametri di *Rodrigues* Modificati
- Quaternioni

Transformations Grazie ai blocchi che lo compongono è possibile passare, tramite relazioni algebriche, da un tipo di rappresentazione cinematica ad un'altra. Compare inoltre un blocco accessorio per la stima dell'errore iniziale sull'assetto, e cioè la rotazione che porta dal valore reale dell'orientazione satellitare a quello desiderato all'inizio della manovra.

New Animations Due blocchi in grado di dare una visualizzazione del moto attorno al centro di massa della piattaforma. Sono entrambi una modifica del pre-esistente blocco **Simulink**[©] chiamato *6-DoF-Visualization* (six degree of freedom visualization) facente

parte del **Simulink** Extras/Aerospace Blocks/Visualization. Tale blocco standard utilizza gli angoli di *Eulero* per calcolare la matrice di rotazione da terna inerziale a terna corpo (in moto rispetto alla prima). Come è noto tale rappresentazione presenta una singolarità per rotazioni di 180° . Simulazioni che usino il *6-DoF-Visualization* generano errori nella visualizzazione, senza che sia restituito all'utente un qualsiasi messaggio. Modificare la matrice di rotazione, tramite l'ausilio di rappresentazioni a quattro parametri, permette di visualizzare qualsiasi tipo di moto. In particolare i Quaternioni ed i Parametri di *Eulero* sono stati utilizzati per questi due blocchi.

Controllers for Attitude Tracking Racchiude i due tipi di controllori illustrati nel paragrafo 2.1, inclusi i casi di *Failure Mode*. Inoltre è presente un blocco accessorio per la stima dell'andamento della funzione di *Lyapunov*.

Nei seguenti paragrafi la descrizione dettagliata dei vari sottosistemi.

4.2 VSCMG dynamics

Il gruppo in questione appare in questo modo:

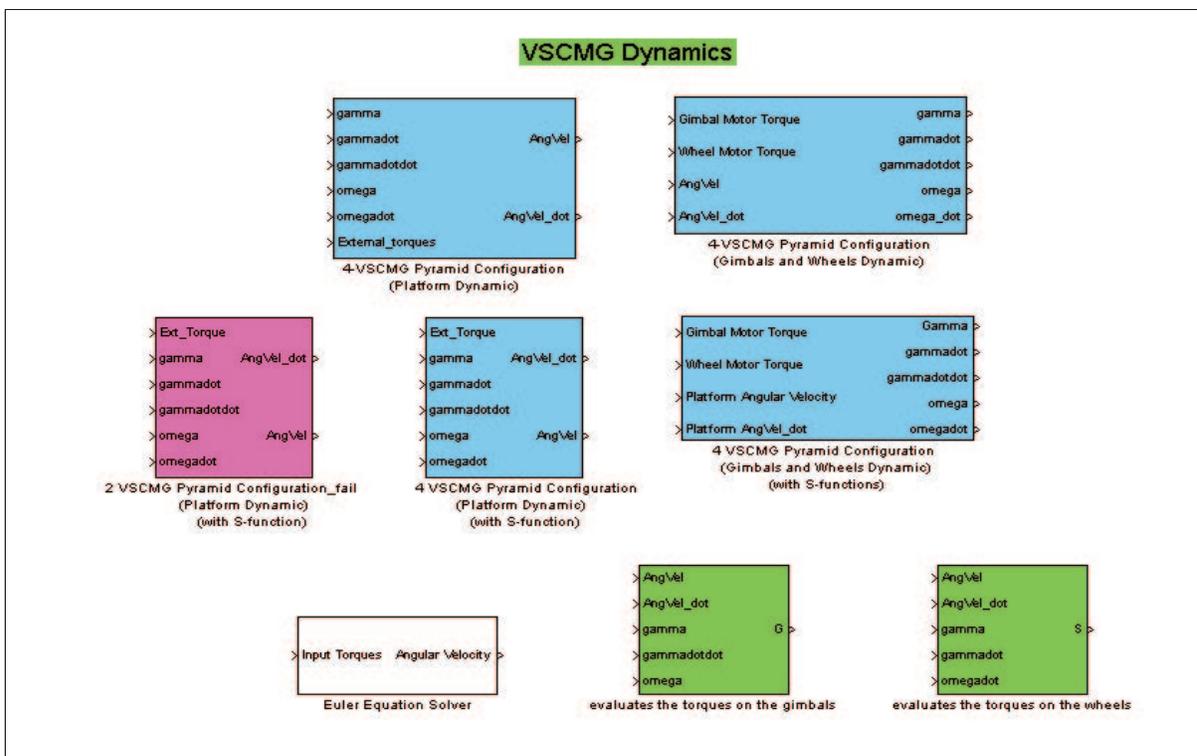


Figura 4.3: gruppo VSCMG dynamics

I blocchi detti *4 VSCMG Pyramid configuration* (sia per la dinamica della piattaforma che di giunti e ruote) sono una modifica di quelli pre-esistenti nella versione 1.0 del *toolbox*. Sono sostanzialmente integratori delle equazioni 1.6, 3.20 e 3.25. La maschera, per il blocco di dinamica della piattaforma, risulta:

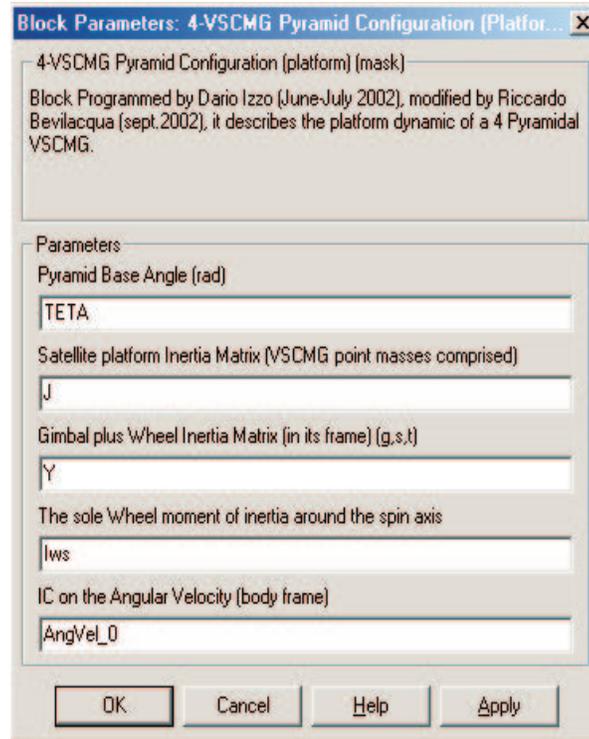


Figura 4.4: maschera del blocco *4-VSCMG Pyramid Configuration (platform)*

Il significato dei parametri è il seguente:

1. Pyramid Base Angle (rad): l'angolo alla base della piramide, chiamato θ .
2. Satellite Platform Inertia Matrix (VSCMG point masses comprised): inerzia della piattaforma nel suo riferimento. Ad esso si aggiunge il diadico di inerzia $\sum_{j=1}^n m_j \left(b_j^2 \mathbf{1} - \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j \right)$. Unità di misura in $kg \cdot m^2$.
3. Gimbal plus Wheel Inertia Matrix (in its frame) (g,s,t): matrice d'inerzia del j-simo V.S.C.M.G. nel riferimento dello stesso. Per semplicità i 4 dispositivi saranno scelti con identiche proprietà di inerzia. Unità di misura in $kg \cdot m^2$.
4. The Sole Wheel moment of Inertia around the Spin Axis: inerzia della generica ruota attorno al proprio asse di spin. ($kg \cdot m^2$)
5. IC on the Angular Velocity (body frame): vettore 3x1 delle condizioni iniziali sulla velocità angolare della piattaforma, proiettata nel riferimento solidale alla stessa. Unità di misura in $\frac{rad}{s}$.

La maschera per il blocco di dinamica di ruote e giunti risulta:

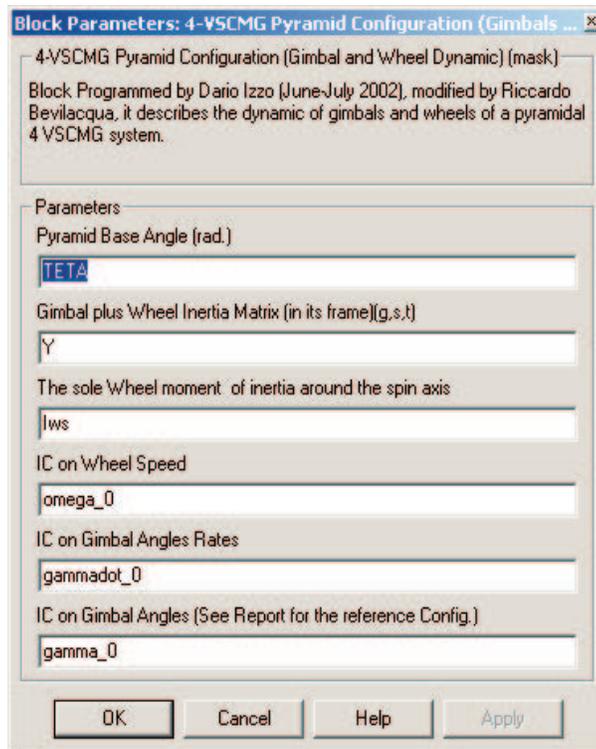


Figura 4.5: maschera del blocco *4-VSCMG Pyramid Configuration (Gimbal and Wheel dynamic)*

Restano da illustrare i significati di:

1. IC on Wheel Speed: vettore 4×1 delle condizioni iniziali sulle velocità delle 4 ruote ($\frac{rad}{s}$).
2. IC on Gimbal Angles Rates: vettore 4×1 delle condizioni iniziali sulle velocità dei 4 giunti ($\frac{rad}{s}$).
3. IC on Gimbal Angles: vettore 4×1 delle condizioni iniziali sulle posizioni dei 4 giunti (rad).

In questi blocchi si utilizza la classica tecnica **Simulink**[©] di assemblaggio. Una volta impostati i valori dei parametri richiesti nelle maschere (richiamando variabili salvate sul *workspace* di **Matlab**[©] o direttamente immettendo valori nella maschera) è necessario fornire ai blocchi i segnali all'ingresso. *4-VSCMG Pyramid Configuration (platform)* è alimentato da 7 segnali:

1. gamma: vettore 4×1 delle posizioni angolari dei giunti (rad).
2. gammadot: vettore 4×1 delle velocità angolari dei giunti ($\frac{rad}{s}$).
3. gammadotdot: vettore 4×1 delle accelerazioni angolari dei giunti ($\frac{rad}{s^2}$).
4. omega: vettore 4×1 delle velocità angolari delle ruote ($\frac{rad}{s}$).

5. omegadot: vettore 4×1 delle accelerazioni angolari delle ruote ($\frac{rad}{s^2}$).
6. AngVel: vettore 3×1 delle componenti in assi corpo della velocità angolare della piattaforma ($\frac{rad}{s}$).
7. External torques: eventuali coppie esterne applicate al veicolo spaziale ($N \cdot m$).

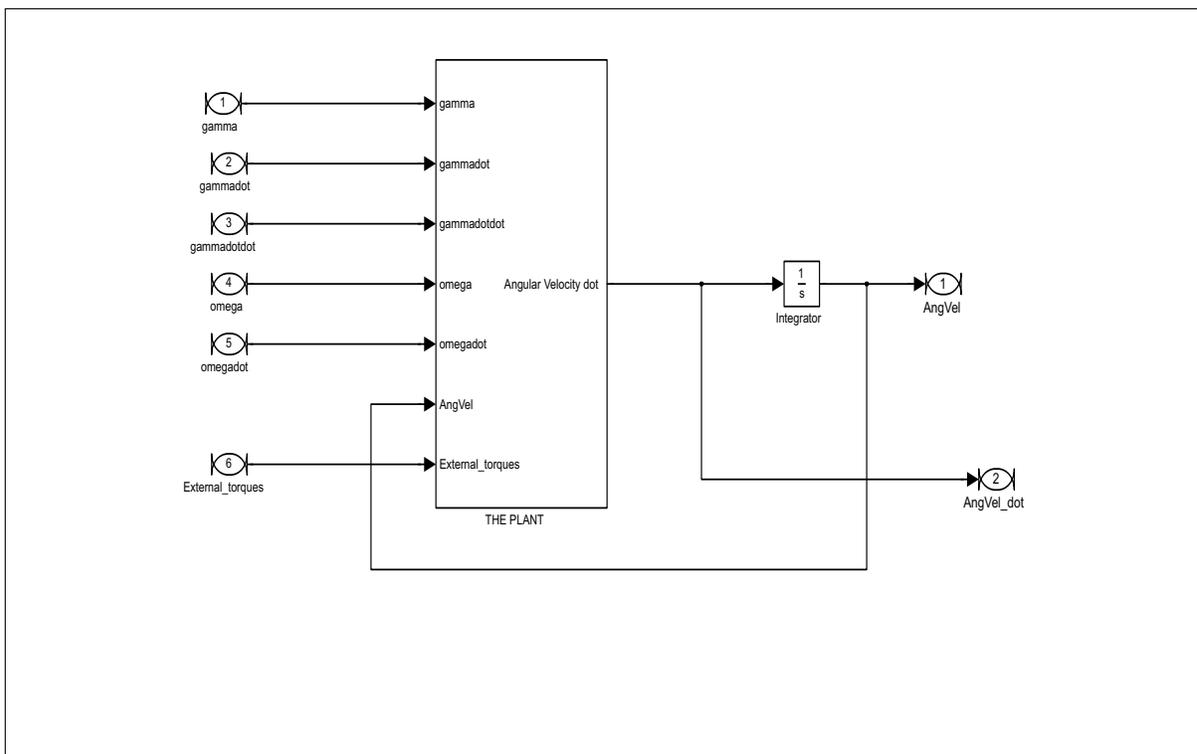


Figura 4.6: Sottosistema del blocco 4-VSCMG Pyramid Configuration (platform)

L'uscita del blocco consta di due segnali: la velocità angolare della piattaforma e la derivata di questa. Sostanzialmente, il blocco chiamato *The Plant* genera il vettore derivata della velocità angolare del satellite ($\dot{\omega}$ ricavato dalla 1.6) che viene integrato con la condizione iniziale impostata nella maschera. L'interno di *The Plant* si presenta così:

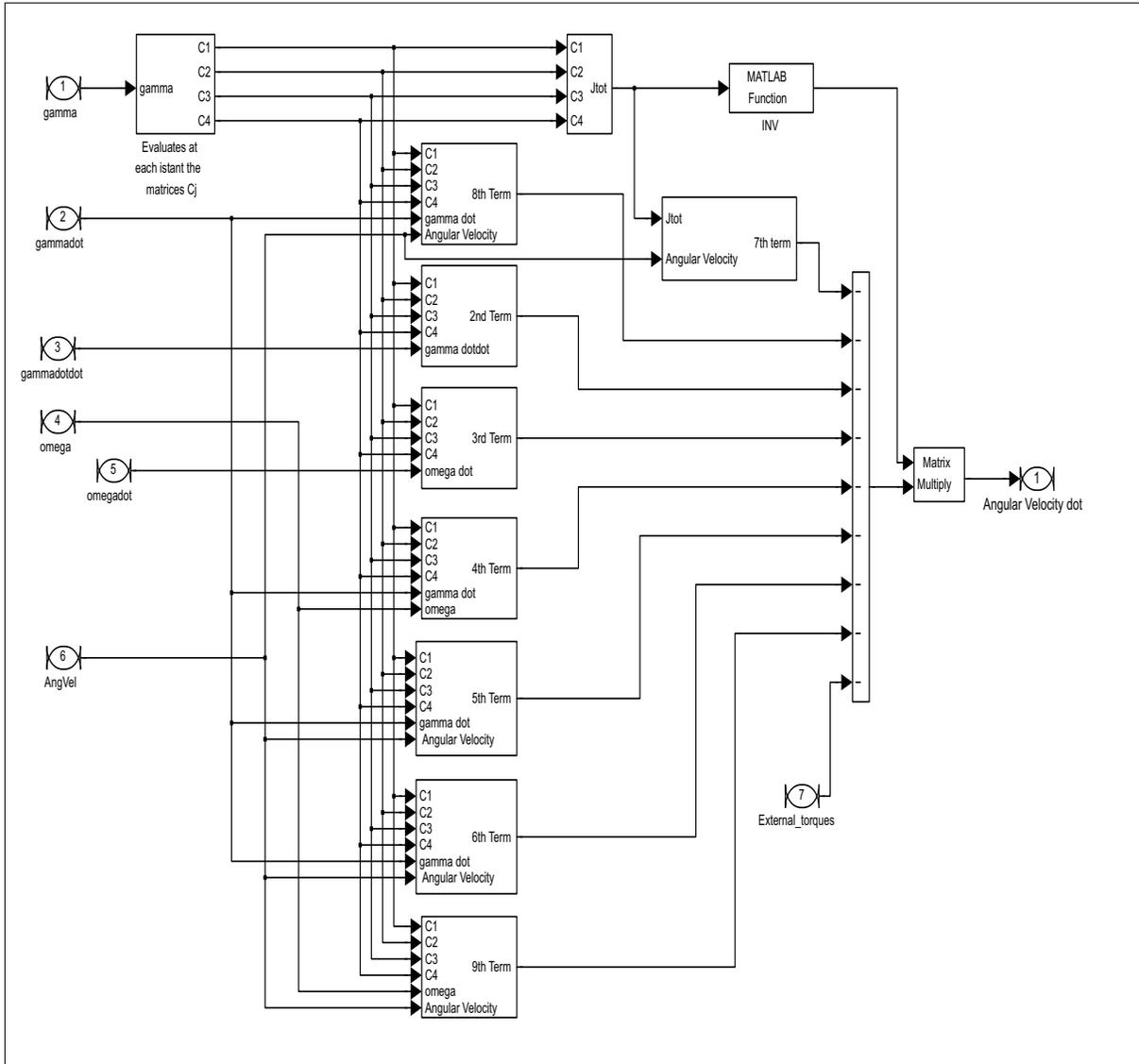


Figura 4.7: interno di *The Plant*

I blocchi j -th calcolano i j -simi termini della 1.6. Impostando ingressi nulli per $\dot{\Omega}$ prendiamo in considerazione sistemi *C.M.G.*, se invece $\dot{\gamma} = 0$ abbiamo semplici *Reaction Wheels*. Passando alla descrizione di *4-VSCMG Pyramid Configuration (Gimbal and Wheel dynamic)* ne riportiamo i *subsystems* immediatamente al di sotto della maschera:

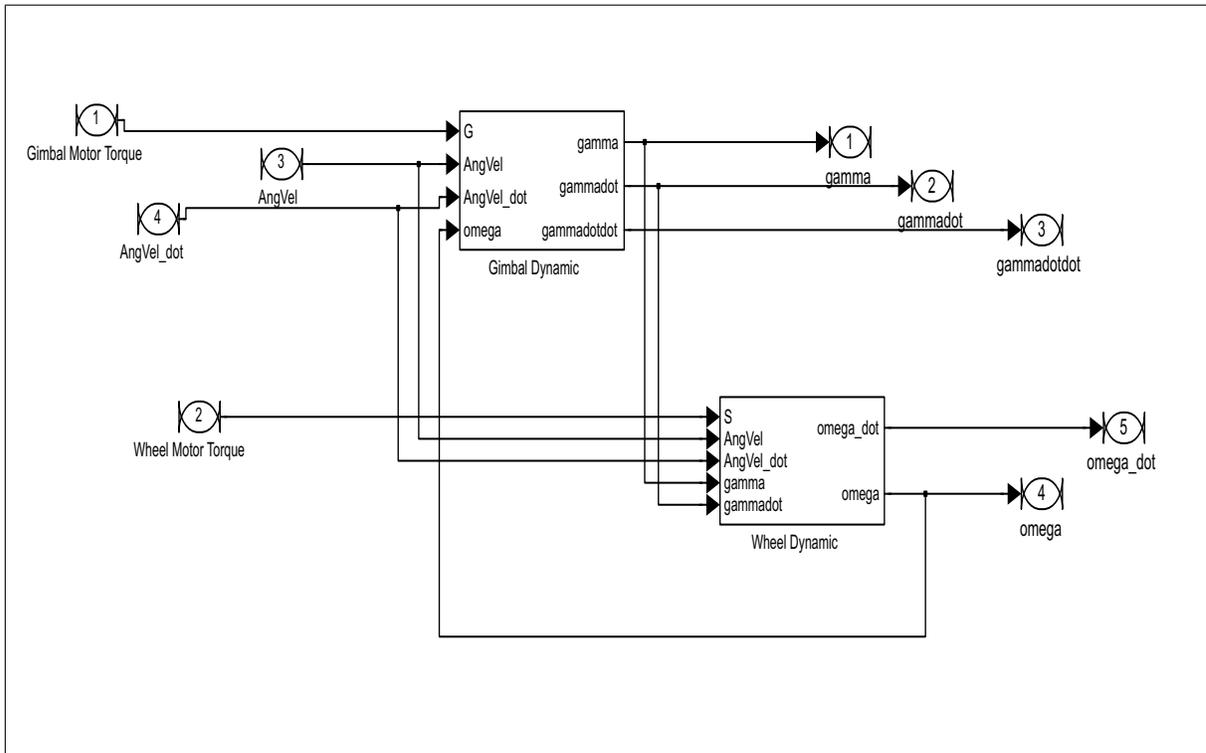


Figura 4.8: Sottosistema del blocco 4-VSCMG Pyramid Configuration (Gimbal and Wheel dynamic)

In tal caso i segnali in ingresso, affinché vengano risolte la 3.20 e la 3.25, sono:

1. Gimbal Motor Torque: vettore 4×1 costituito dalle coppie applicate sui giunti cardanici ($N \cdot m$).
2. Wheel Motor Torque: vettore 4×1 costituito dalle coppie applicate sulle ruote ($N \cdot m$).
3. AngVel: già citato vettore 3×1 della velocità angolare satellitare ($\frac{rad}{s}$).
4. AngVel dot: derivata del precedente ($\frac{rad}{s^2}$).

In uscita otteniamo:

1. gamma: vettore 4×1 delle posizioni angolari dei giunti (rad).
2. gammadot: vettore 4×1 delle velocità angolari dei giunti ($\frac{rad}{s}$).
3. gammadotdot: vettore 4×1 delle accelerazioni angolari dei giunti ($\frac{rad}{s^2}$).
4. omega: vettore 4×1 delle velocità angolari delle ruote ($\frac{rad}{s}$).
5. omegadot: vettore 4×1 delle accelerazioni angolari delle ruote ($\frac{rad}{s^2}$).

La versione originale di tale blocco, che compariva in **V.S.C.M.G. Toolbox, V1.0** integrava la dinamica di giunti e ruote a partire dalle 1.14 e 1.15, richiedendo condizioni iniziali per K_{g_j} e K_{s_j} invece che per $\dot{\gamma}$ e Ω . In questo modo l'uscita era costituita solo da $\dot{\gamma}$ e Ω , richiedendo l'ausilio di derivatori per generare tutti i segnali necessari all'alimentazione del blocco di figura 4.6. Nella versione attuale si è preferito costruire un sistema in grado di generare le uscite del vecchio blocco e i caratteri differenziali di queste, senza utilizzare derivatori. La scelta non è stata dettata solo da motivi di eleganza, da un punto di vista di assemblaggio blocchi, ma anche, e soprattutto, da ragioni di tipo numerico. L'ausilio di un numero elevato di blocchi derivatori porta la simulazione ad instabilità ed impedisce di ottenere dei risultati accettabili. Questo problema si è riscontrato nei primi tentativi di simulazione per i quali si riscontravano andamenti estremamente incoerenti rispetto al modello costruito: instabilità numerica che portava a pensare ad errori nell'implementazione. La riduzione al minimo delle derivazioni numeriche, fino all'eliminazione completa, ha invece risolto il problema, e permesso di verificare la correttezza dei blocchi costruiti e la stabilità asintotica dello stato del sistema satellitare.

I blocchi che compaiono in figura 4.3 coi nomi *4 V.S.C.M.G. Pyramid Configuration (Platform Dynamic) (with S-function)* e *4 V.S.C.M.G. Pyramid Configuration (Gimbals and Wheels Dynamic) (with S-function)*, hanno identica funzione di quelli sopra descritti, ma sono stati programmati ex-novo utilizzando funzioni salvate nella cartella della *toolbox*. In essi sono richiamate delle *S-functions Matlab*® , vere e proprie funzioni in grado di essere mascherate, come i blocchi, per inserire parametri dall'esterno. Le maschere sono quindi le stesse riportate nelle figure 4.4 e 4.5. La scelta dell'uso di *S-functions* nasce esclusivamente da esigenze di migliore leggibilità dei blocchi stessi. Nel momento in cui le equazioni risultano estremamente lunghe il numero di blocchi e sottosistemi, atti a rappresentarle, cresce enormemente, e il vantaggio della visibilità, propria dei *blocks*, si perde. Si pensi ad esempio ad un semplice ciclo *for*: lo si può generare con poche righe di un qualsivoglia linguaggio di programmazione. Implementarlo in **Simulink**® significa sommare le uscite di un numero di blocchi pari all'indice n del ciclo. Come si può immaginare il tutto si traduce in blocchi di spropositate dimensioni e soprattutto di leggibilità pressochè nulla. Questo problema si è manifestato in particolare durante la programmazione del controllore, dove un gran numero di calcoli deve essere effettuato. Da lì è partita la scelta del richiamare funzioni, più o meno lunghe e complesse, salvate separatamente e accessibili in maniera rapida da **Matlab**® . Si riporta l'interno di *4 V.S.C.M.G. Pyramid Configuration (Platform Dynamic) (with S-function)* e *4 V.S.C.M.G. Pyramid Configuration (Gimbals and Wheels Dynamic) (with S-function)* notando come non ci siano ulteriori sottoblocchi, una volta avuto accesso al di sotto della maschera:

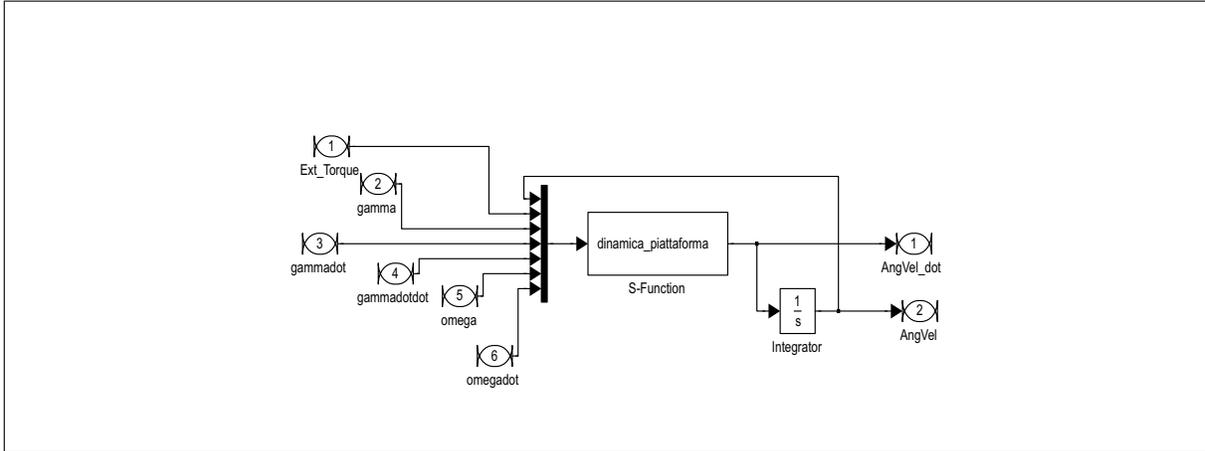


Figura 4.9: Sottosistema del blocco 4 V.S.C.M.G. *Pyramid Configuration (Platform Dynamic)* (with S-function)

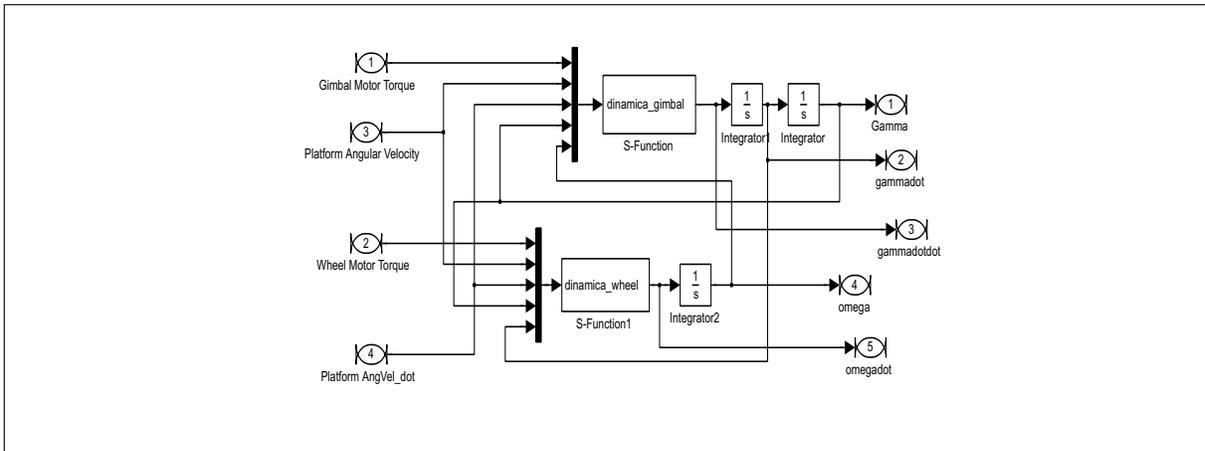


Figura 4.10: Sottosistema del blocco 4 V.S.C.M.G. *Pyramid Configuration (Gimbals and Wheels Dynamic)* (with S-function)

Non è necessario soffermarsi di nuovo su input e output dei blocchi, essendo identici ai due precedenti. Selezionando le funzioni richiamate (*dinamica-piattaforma* per 4 V.S.C.M.G. *Pyramid Configuration (Platform Dynamic)* (with S-function) e *dinamica-wheel* e *dinamica-gimbal* per 4 V.S.C.M.G. *Pyramid Configuration (Gimbals and Wheels Dynamic)* (with S-function)) appaiono le relative maschere che richiedono gli stessi parametri di cui in figura 4.4 e 4.5, a parte i valori delle condizioni iniziali, necessari agli integratori:

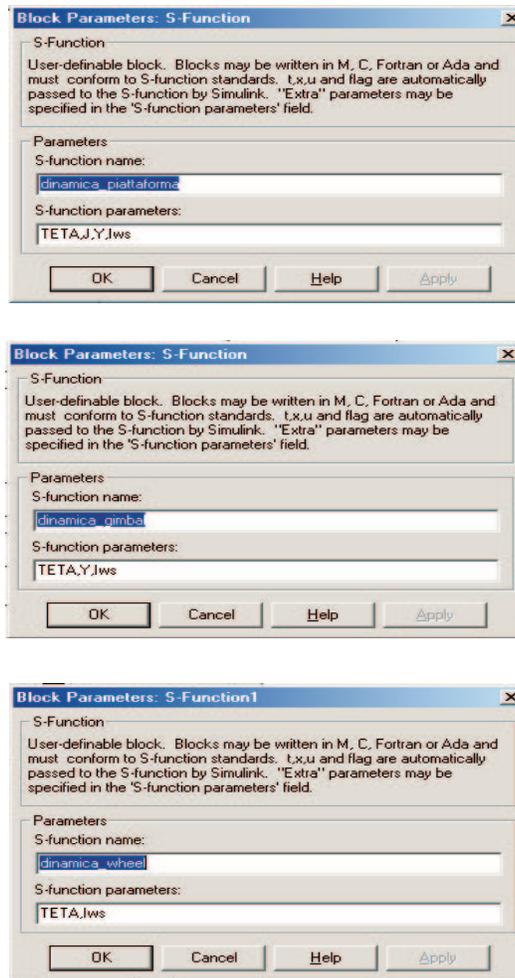


Figura 4.11: Maschere delle *S-functions* richiamate nei blocchi 4 V.S.C.M.G. *Pyramid Configuration (Platform Dynamic) (with S-function)* e 4 V.S.C.M.G. *Pyramid Configuration (Gimbals and Wheels Dynamic) (with S-function)*

Per il caso di *failure mode* si è scelto di tenere operativi il primo e il terzo V.S.C.M.G..

Nulla vieta una diversa scelta dei giunti da lasciare in funzione, con una semplice modifica alle funzioni richiamate. Il blocco 2 *V.S.C.M.G. Pyramid Configuration-fail (Platform Dynamic) (with S-function)* è mascherato allo stesso modo del corrispettivo nel caso di quattro *V.S.C.M.G.* operativi. Anche il *subsystem* è lo stesso. La modifica risiede nella funzione richiamata: semplicemente è bastato impostare i cicli *for* (che calcolano le sommatorie della relazione 1.6) in modo da considerare solo i valori 1 e 3 del contatore. Restando inalterato il numero di ingressi, si devono passare dei segnali relativi anche ai *V.S.C.M.G.* non operativi. In realtà si può passare qualsiasi valore non essendo comunque utilizzati nel calcolo dei cicli.

Omettendo la descrizione del blocco che integra le equazioni di *Eulero*, identico a come appariva nella versione 1.0 del *toolbox*, e peraltro inutile ai fini di questa tesi, concludiamo la descrizione del gruppo con i blocchi che calcolano le coppie applicate su giunti e ruote (*evaluates the torques on the Gimbals/Wheels*). Il primo ha come output il vettore G (4×1) delle coppie sui giunti, calcolato tramite la relazione 3.20, esplicitata rispetto a G_j . La maschera richiede:

1. Pyramid Base Angle (rad): l'angolo alla base della piramide, chiamato θ .
2. Gimbal plus Wheel Inertia Matrix (in its frame) (g,s,t): matrice d'inerzia del j-simo V.S.C.M.G. nel riferimento dello stesso. Unità di misura in $kg \cdot m^2$.
3. The Sole Wheel moment of Inertia around the Spin Axis: inerzia della generica ruota attorno al proprio asse di spin. ($kg \cdot m^2$)

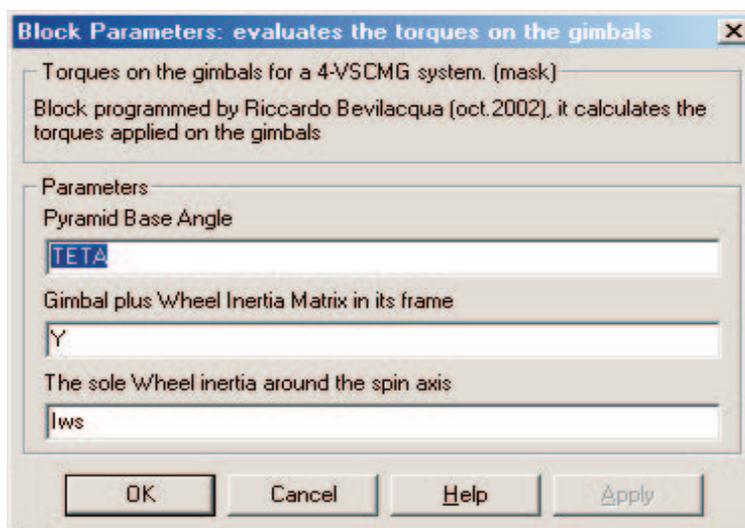


Figura 4.12: maschera del blocco *evaluates the torques on the Gimbals*

Al suo interno è richiamata la funzione calcola-coppia-G a cui sono passati i seguenti segnali:

1. AngVel: vettore 3×1 delle componenti in assi corpo della velocità angolare della piattaforma ($\frac{rad}{s}$).
2. AngVel dot: vettore 3×1 delle componenti in assi corpo della derivata della velocità angolare della piattaforma ($\frac{rad}{s^2}$).
3. gamma: vettore 4×1 delle posizioni angolari dei giunti (rad).
4. gammadotdot: vettore 4×1 delle accelerazioni angolari dei giunti ($\frac{rad}{s^2}$).
5. omega: vettore 4×1 delle velocità angolari delle ruote ($\frac{rad}{s}$).

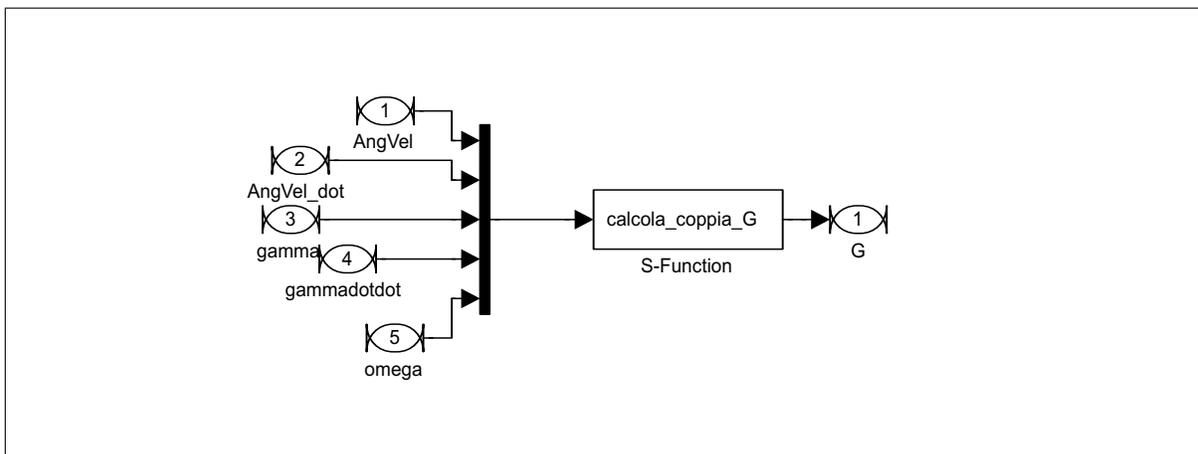


Figura 4.13: Sottosistema del blocco *evaluates the torques on the Gimbals*

Il corrispettivo per le ruote (output=vettore 4x1 delle coppie sulle stesse) necessita dei seguenti parametri in maschera:

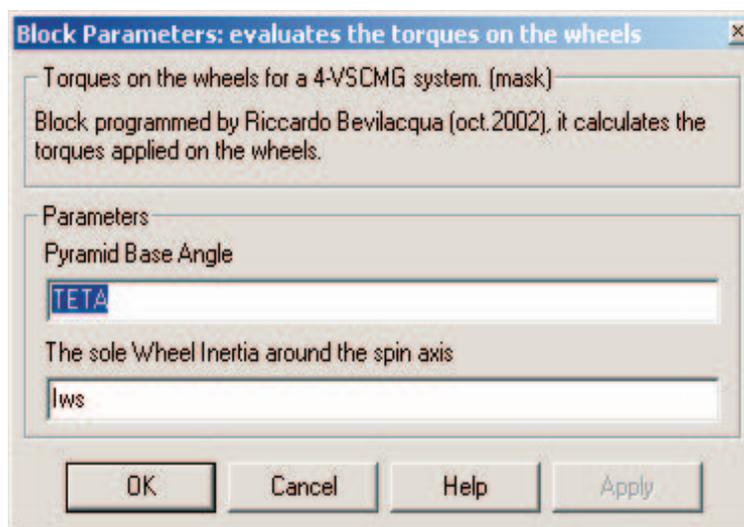


Figura 4.14: maschera del blocco *evaluates the torques on the Wheels*

1. Pyramid Base Angle (rad): l'angolo alla base della piramide, chiamato θ .
2. The Sole Wheel moment of Inertia around the Spin Axis: inerzia della generica ruota attorno al proprio asse di spin. ($kg \cdot m^2$)

La funzione calcola-coppia-S richiede:

1. AngVel: vettore 3x1 delle componenti in assi corpo della velocità angolare della piattaforma ($\frac{rad}{s}$).

2. AngVel dot: vettore 3×1 delle componenti in assi corpo della derivata della velocità angolare della piattaforma ($\frac{rad}{s^2}$)
3. gamma: vettore 4×1 delle posizioni angolari dei giunti (rad).
4. gammadot: vettore 4×1 delle velocità angolari dei giunti ($\frac{rad}{s}$).
5. omegadot: vettore 4×1 delle accelerazioni angolari delle ruote ($\frac{rad}{s^2}$).

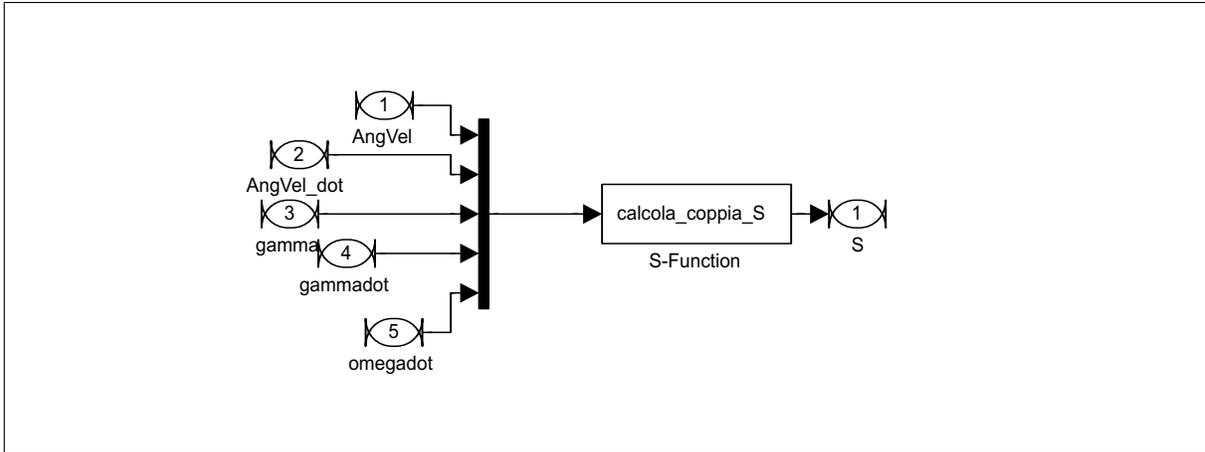


Figura 4.15: Sottosistema del blocco *evaluates the torques on the Wheels*

Notiamo infine come non siano presenti blocchi di *failure mode* nè per il calcolo delle coppie, nè per la dinamica di giunti e ruote. Il motivo è molto semplice: nell'assemblaggio delle varie parti, al fine di simulare una manovra qualsiasi, basta filtrare i segnali significativi ed annullare quelli dei V.S.C.M.G. non operativi. Inoltre, durante lo sviluppo del presente lavoro di tesi, si è notato come il controllore del modello **Torque Based** (par. 3.2) risulti perfettamente funzionante ma, nella forma qui illustrata, dia risultati praticamente inaccettabili. Per questo motivo non si è proceduto all'implementazione di blocchi di dinamica delle ruote e giunti, per il caso *failure mode*, in quanto sarebbero stati necessari solo per tale tipo di controllo.

4.3 Rigid Body Attitude Kinematics

Il gruppo è costituito da tre blocchi:

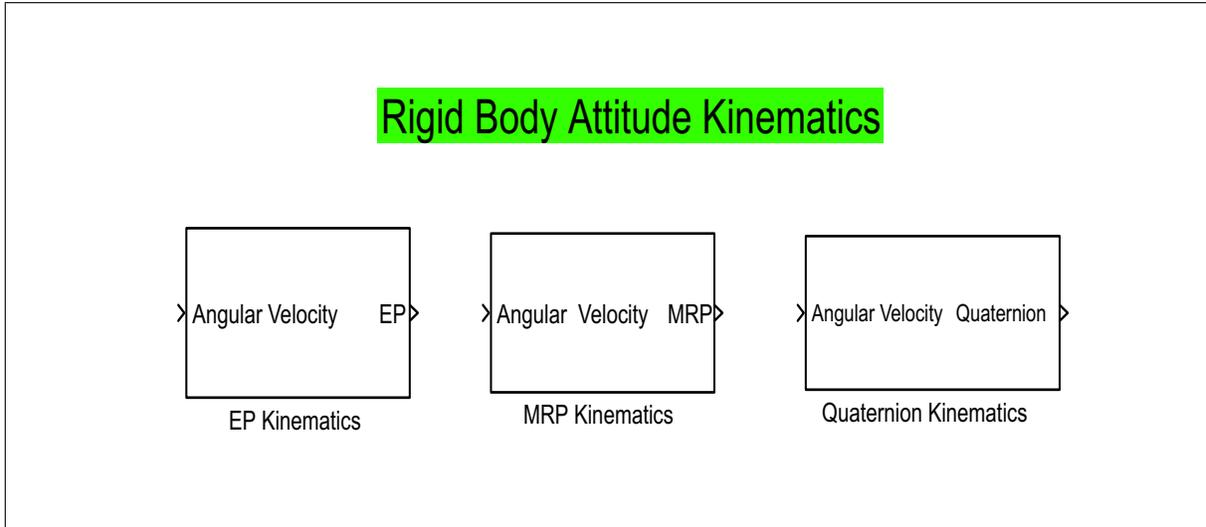


Figura 4.16: gruppo Rigid Body Attitude Kinematics

Il primo blocco integra le equazioni della cinematica scritte con i Parametri di *Eulero* (vedi eq. 1.19 nel paragrafo 1.5). Per completezza vengono riportate le suddette relazioni e il significato degli EP:

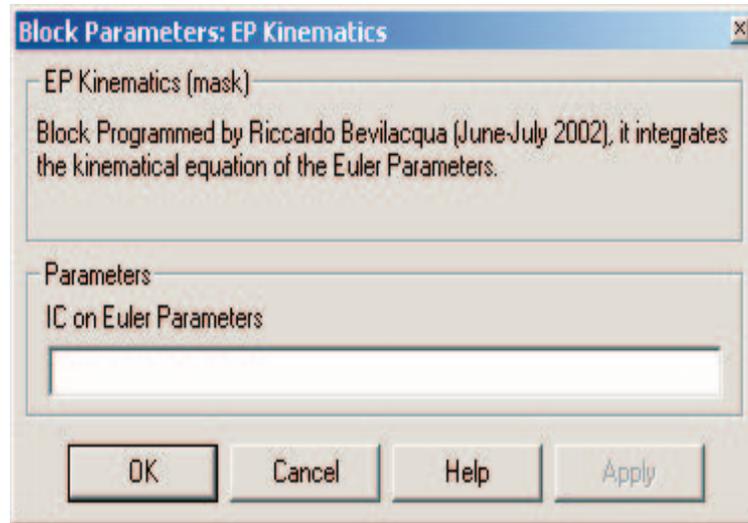
$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon}_3 \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r & -q & p \\ -r & 0 & p & q \\ q & -p & 0 & r \\ -p & -q & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \eta \end{bmatrix}$$

$$(\vec{\varepsilon}, \eta) := (\hat{\varepsilon} \sin \frac{\Phi}{2}, \cos \frac{\Phi}{2})$$

Dove $\hat{\varepsilon}$ è il versore dell'asse di rotazione, scritto nella terna inerziale, Φ l'angolo di rotazione attorno ad esso e con p , q ed r si sono indicate le componenti, in assi corpo, della velocità angolare del satellite. La maschera richiede esclusivamente una condizione iniziale sulla posizione del corpo rigido per iniziare l'integrazione. L'utente dovrà porre attenzione nell'inserimento di questo vettore 4x1, affinché rispetti la condizione:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \eta^2 = 1 \quad (4.1)$$

in quanto il blocco non è in grado di riconoscere valori incoerenti della condizione iniziale.

Figura 4.17: maschera del blocco *EP Kinematics*

Il secondo blocco integra la relazione 4.3:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) & -\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 & \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2 \\ \sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 & \frac{1}{2}(1 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2) & -\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3 \\ -\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 & \sigma_1 + \sigma_2\sigma_3 & \frac{1}{2}(1 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che:

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T := \sigma := \hat{\mathbf{e}} \tan \frac{\Phi}{4}$$

La condizione iniziale viene richiesta in maschera sugli EP. All'interno del blocco è poi convertita in termini di MRP tramite le:

$$\sigma_i = \frac{\varepsilon_i}{1 + \eta}$$

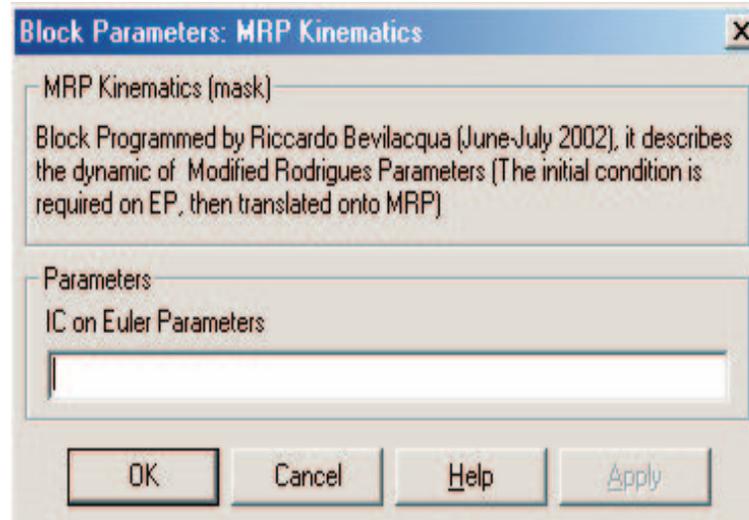


Figura 4.18: maschera del blocco *MRP Kinematics*

L' *MRP Kinematics* si avvale di un convertitore da EP a MRP che verrà descritto nel paragrafo relativo al gruppo *Transformations*.

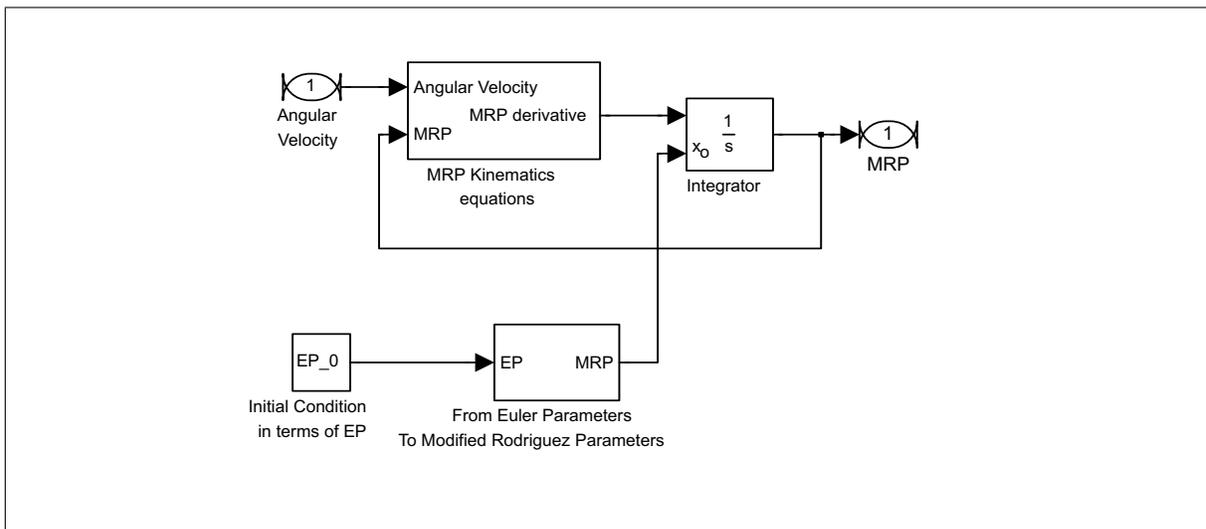


Figura 4.19: interno del blocco *MRP Kinematics*

Infine si ha il blocco che integra le relazioni cinematiche tramite quaternioni. Il loro significato è:

$$Q := [q_0, \vec{q}] := \left(\cos \frac{\Phi}{2}, \hat{e} \sin \frac{\Phi}{2} \right)$$

e le relazioni da integrare:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Logicamente la condizione iniziale è ancora un vettore 4x1 che deve rispettare il vincolo 4.1.

4.4 Transformations

Consta di un insieme di blocchi che calcolano, in maniera molto semplice, le relazioni algebriche che permettono di passare da una rappresentazione cinematica ad un'altra. Logicamente non sono necessari parametri nelle maschere, le quali risultano semplicemente descrittive.

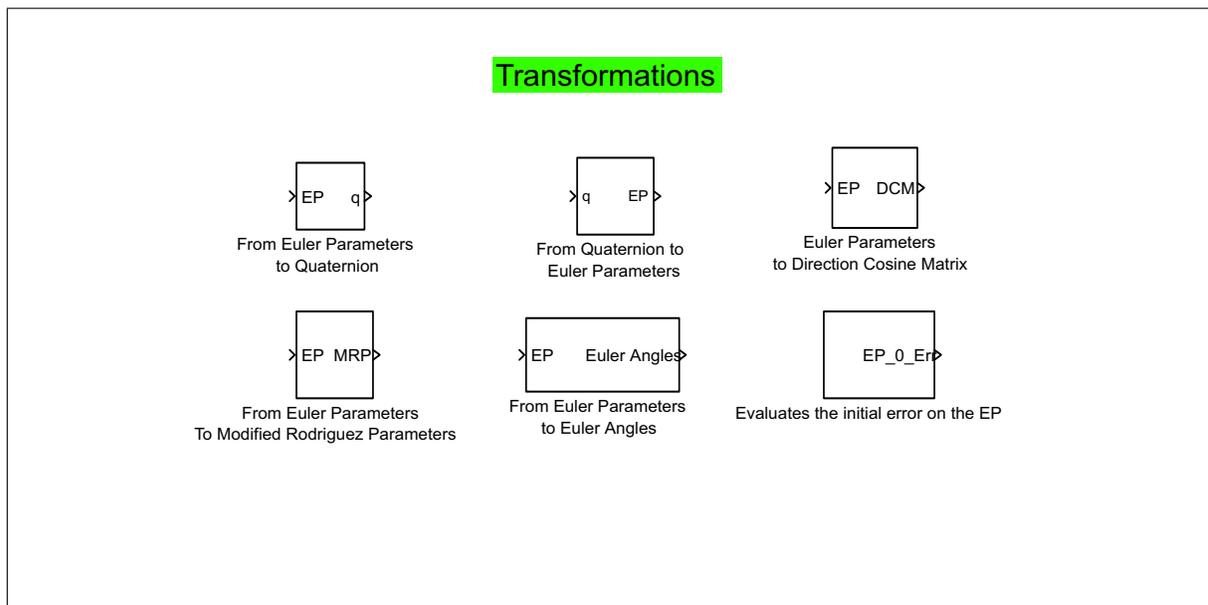


Figura 4.20: gruppo Transformations

Da EP a Quaternioni Bastano delle semplici permutazioni, come indicato nel paragrafo 1.5:

$$\begin{aligned} q_0 &= \eta \\ q_1 &= \varepsilon_1 \\ q_2 &= \varepsilon_2 \\ q_3 &= \varepsilon_3 \end{aligned}$$

In ingresso abbiamo un vettore di dimensione 4, come d'altronde in uscita.

Dai Quaternioni agli EP Niente da dire: semplicemente l'inverso del blocco precedente!!!

Dagli EP alla matrice dei coseni direttori L'output è la matrice 3x3 dei coseni direttori relativi ad una rotazione rigida. In altre parole è la matrice che, premoltiplicata per un generico vettore \vec{r} , scritto nella terna inerziale, dà come risultato lo stesso vettore dopo

la rotazione (immaginato, quindi, solidale alla terna mobile). Tale matrice può scriversi in funzione di uno qualsiasi dei set di parametri esistenti per la rappresentazione cinematica (si veda [25]). In questa sede si sono scelti gli EP sia perchè privi di singolarità, sia perchè è molto semplice passare da un set ad un altro tramite i blocchi che si stanno illustrando. La *Direction Cosine Matrix* risulta:

$$DCM = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 + \eta^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3\eta) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\eta) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_3\eta) & -\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 + \eta^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\eta) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\eta) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\eta) & -\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \eta^2 \end{bmatrix}$$

Da EP a MRP Semplicemente calcola la relazione:

$$\sigma = \frac{\vec{\varepsilon}}{1+\eta}$$

Da EP agli angoli di *Eulero* Tra i dodici tipi di combinazioni degli angoli di *Eulero* si è scelta quella riportata nel libro di *Mangiacasale* ([25]). Per brevità non riportiamo le relazioni utilizzate in questo blocco, ricavate per confronto tra la matrice di rotazione scritta con gli EP e con gli angoli di *Eulero*. Tali legami possono essere consultati nel libro appena citato.

Nel gruppo *Transformations* compare un blocco chiamato *Evaluates the initial error on the EP*. In maschera sono passati due valori vettoriali dei parametri di *Eulero*:

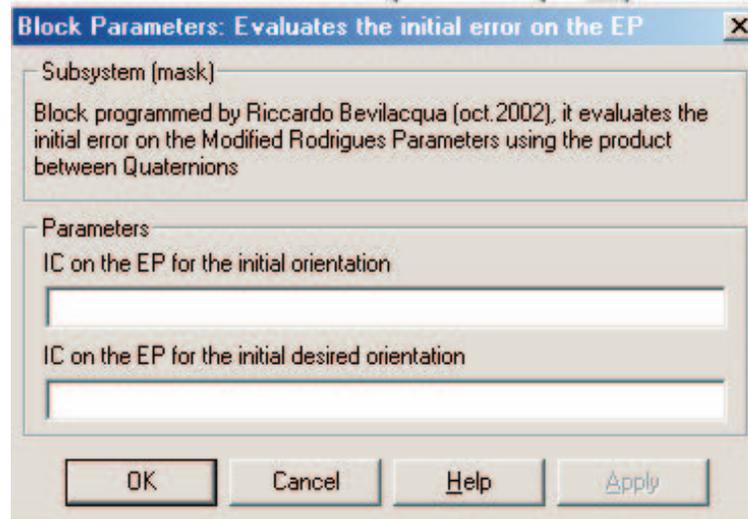


Figura 4.21: maschera del blocco *Evaluates the initial error on the EP*

In pratica viene calcolata la rotazione necessaria per passare da un assetto ad un altro, tramite il prodotto tra quaternioni, in termini di EP. All'interno del blocco avviene dapprima la conversione in quaternioni, poi il prodotto tra i due, tramite la:

$$Q_1 \cdot Q_2 = q_{10}q_{20} - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 + q_{10}\vec{q}_2 + q_{20}\vec{q}_1 + \vec{q}_1 \times \vec{q}_2$$

e infine la riconversione del risultato in EP. L'utilità di questo blocco è generare l'errore iniziale sull'assetto in termini di EP (usando la ben nota regola del prodotto tra quaternioni), da convertire in MRP, e da utilizzare come condizione iniziale per il segnale σ_e necessario ai blocchi di controllo.

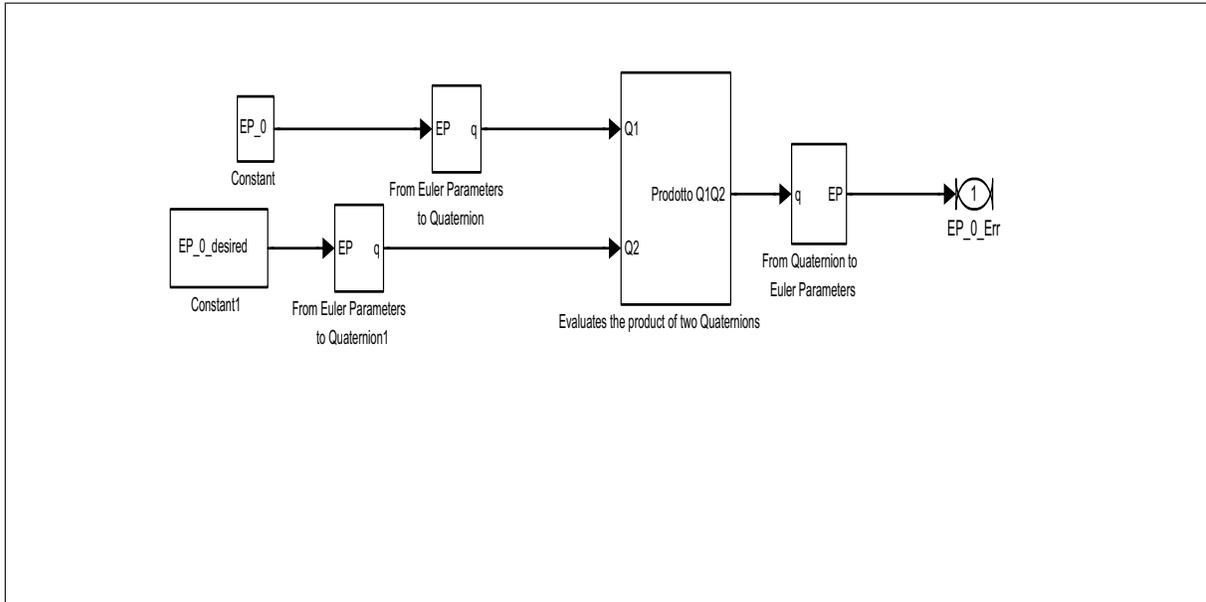


Figura 4.22: interno del blocco *Evaluates the initial error on the EP*

Si è riportato lo schema *undermask* del blocco.

4.5 New Animations

NewAnimations è costituito di due blocchi:

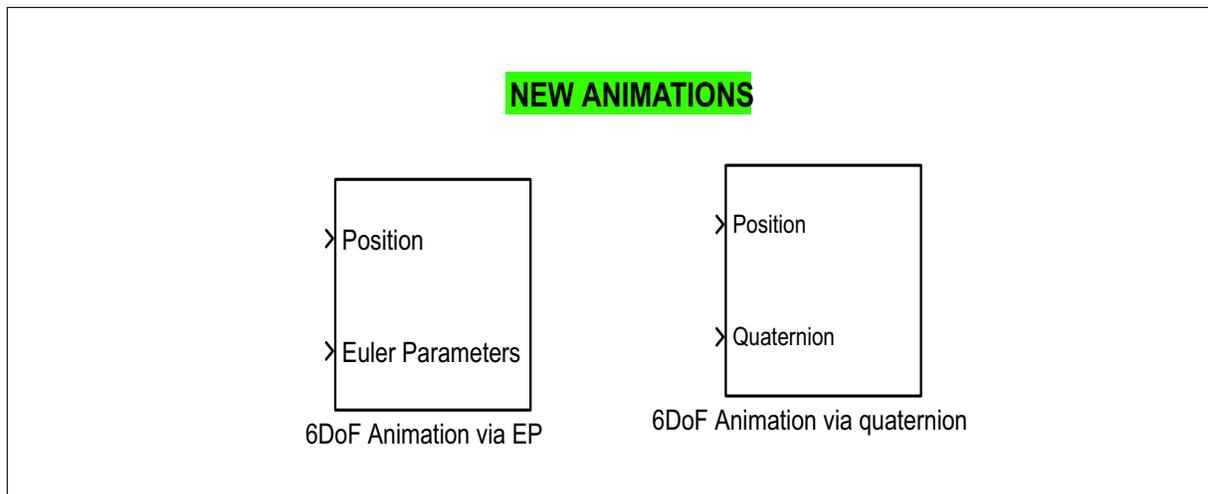


Figura 4.23: gruppo New Animations

In **Simulink**[©] Extras/Aerospace Blocks/Visualization compare un blocco che rappresenta il moto di un corpo rigido. Gli input sono la posizione del centro di massa e i parametri di assetto. Questo blocco accetta in ingresso gli angoli di *Eulero*, generando in tal modo una simulazione visiva che può cadere in singolarità senza dare un messaggio di errore all'utente. In questa sede si è pensato di modificare questo blocco per ottenere visualizzazioni senza punti di singolarità. Il sistema originale utilizza una *S-function* che, tra le altre cose, calcola la matrice dei coseni direttori tramite gli angoli di *Eulero*. Ciò che si è fatto è modificare la matrice, scrivendola o in termini di EP o di quaternioni (rappresentazioni a quattro parametri prive di singolarità). Si sono così ottenute due nuove funzioni dette rispettivamente *sanimEP* e *sanimQ*, che inoltre visualizzano un corpo rigido di forma diversa rispetto a quello preimpostato di **Simulink**[©], il quale era sostanzialmente un missile balistico. Nelle nuove visualizzazioni si ha una forma meno aerodinamica e più vicina a quella di un satellite (prisma ottagonale).

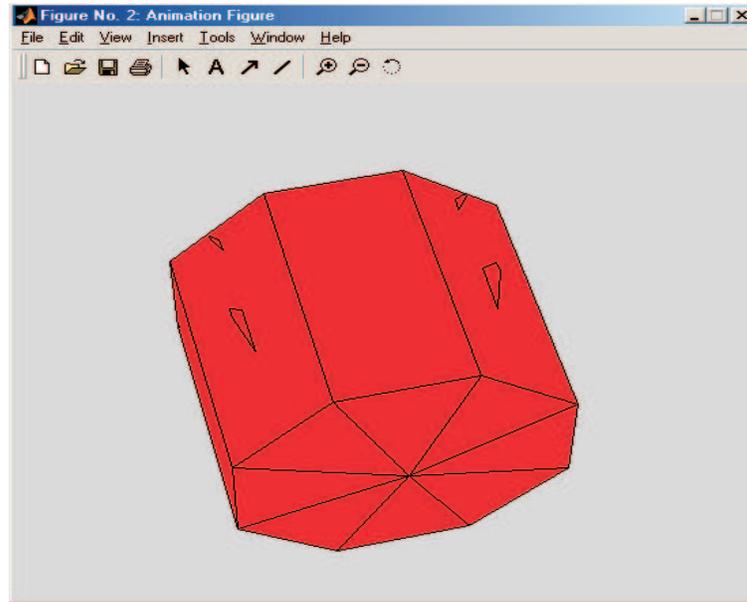


Figura 4.24: Visualizzazione tramite i blocchi *New Animations*

4.6 Controllers for Attitude Tracking

Cinque blocchi compongono il gruppo in analisi:

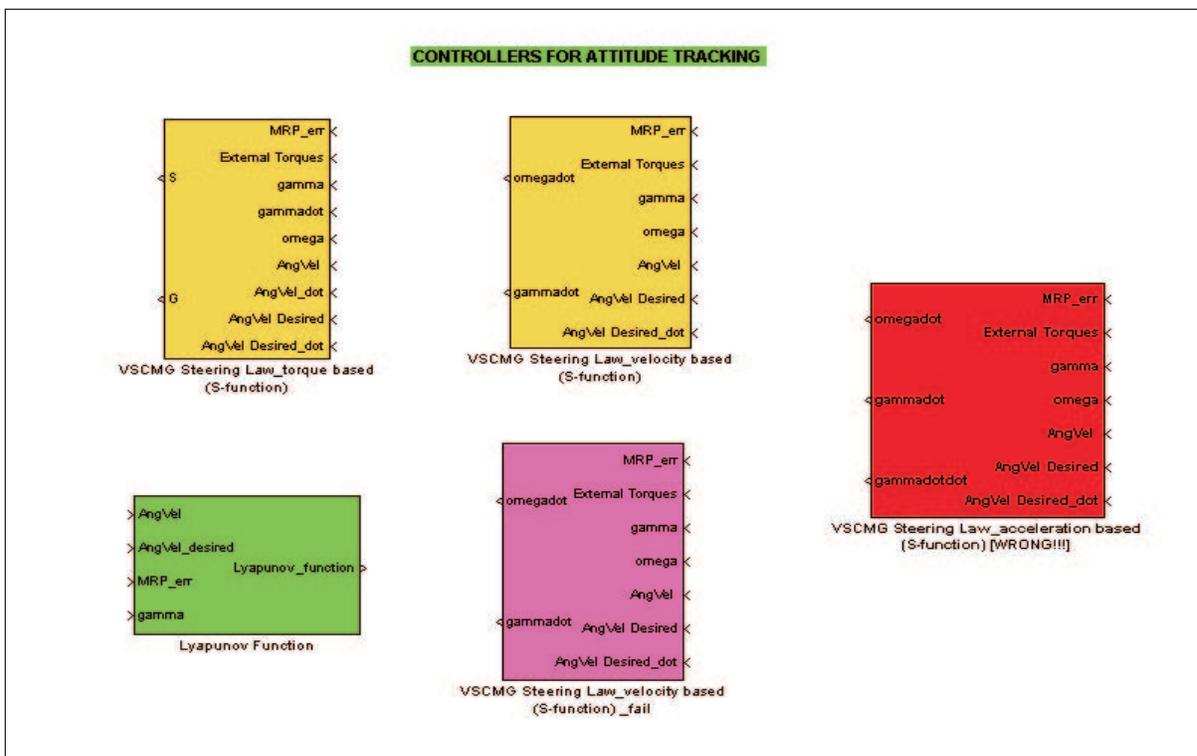


Figura 4.25: gruppo Controllers for Attitude Tracking

I due blocchi su sfondo giallo implementano i primi due controlli illustrati nel capitolo 3. Quello su sfondo rosso il controllo inutilizzabile con *feedback* derivativo. Partendo dal modello *Torque Based*, ricordando l'espressione 3.38, e i parametri da cui dipendono le variabili che vi compaiono, la maschera di *V.S.C.M.G. Steering Law-torque based (S-function)* risulta:

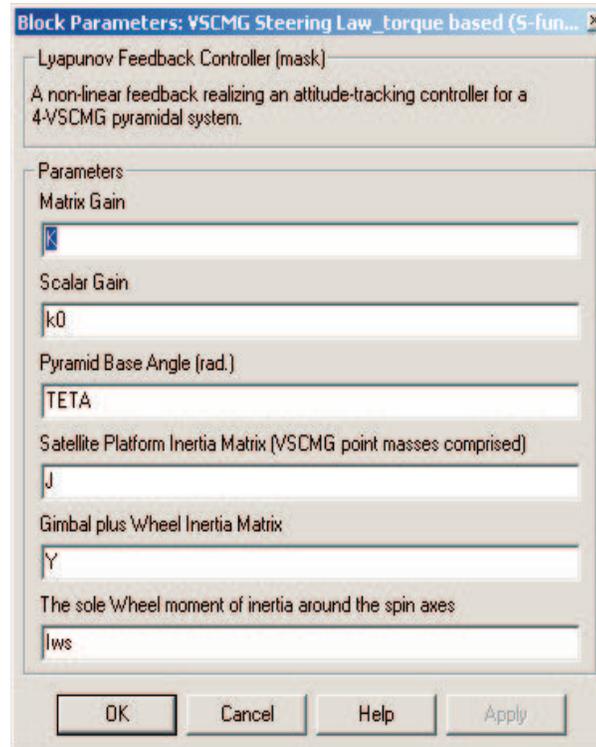


Figura 4.26: maschera del blocco *V.S.C.M.G. Steering Law-torque based (S-function)*

Le grandezze che sono richieste sono già state illustrate per le precedenti maschere. Ci soffermiamo solo su \mathbf{K} e k_0 . La prima è la matrice guadagno 3×1 che compare nella relazione 2.4, dove si impone alla funzione di *Lyapunov* di avere derivata definita negativa. k_0 è invece il guadagno scalare relativo al termine logaritmico nell'errore sul MRP nella funzione di *Lyapunov* (2.3). Sono quindi dei valori a discrezione dell'utente. \mathbf{K} viene utilizzata per stabilire quanto rapidamente si vuole che il sistema converga allo stato di errore nullo. Logicamente il tutto va pesato in termini di sforzo di controllo necessario a soddisfare la richiesta. k_0 invece stabilisce l'entità del termine di errore sull'assetto nell'ambito della funzione V . A parità di ω_e e σ_e la funzione di *Lyapunov* parte da valori diversi, all'istante iniziale della simulazione, a seconda del valore associato a k_0 . All'interno del blocco compare una *S-function* che ha il compito di calcolare la coppia richiesta T . Altri *subsystems* sono invece volti a stimare, istante per istante, le matrici \mathbf{A} e \mathbf{H} , ed infine il problema di minimo vincolato:

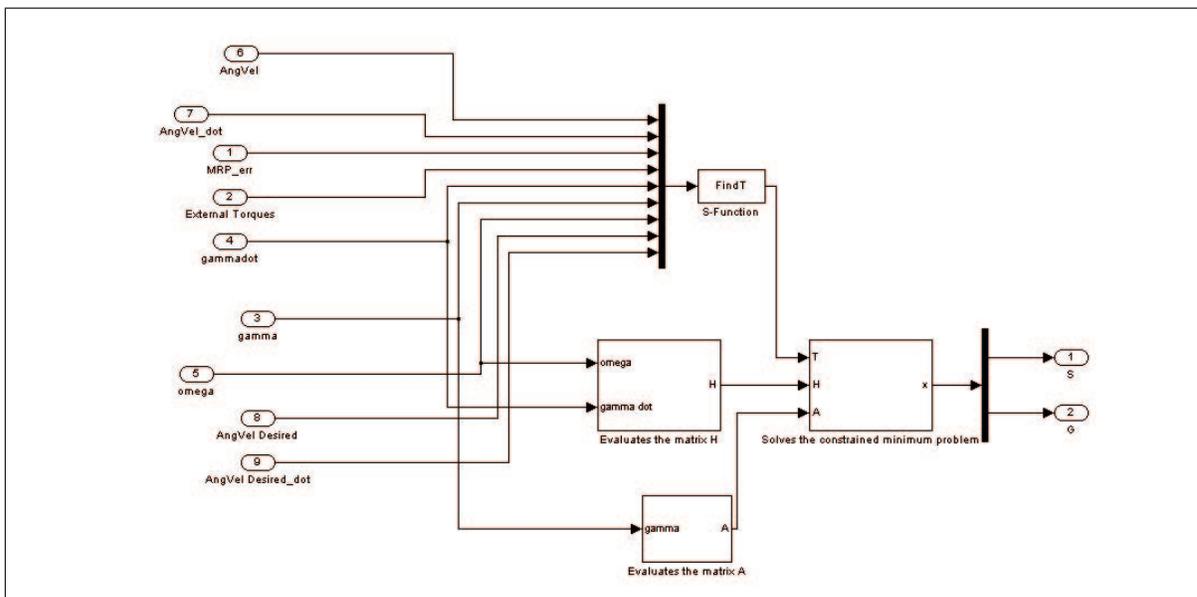


Figura 4.27: interno di V.S.C.M.G. *Steering Law-torque based (S-function)*

Non ci soffermiamo su ingressi e uscite, avendo ormai descritto tutti i segnali che compariranno poi nei modelli completi, dopo aver assemblato i vari blocchi. Per quanto riguarda V.S.C.M.G. *Steering Law-velocity based (S-function)*, ricordando la funzione h , che si è scelto di minimizzare in 3.8, la maschera risulta identica a quella di figura 4.26 con in più la richiesta su W_{s_0} , W_g , μ :

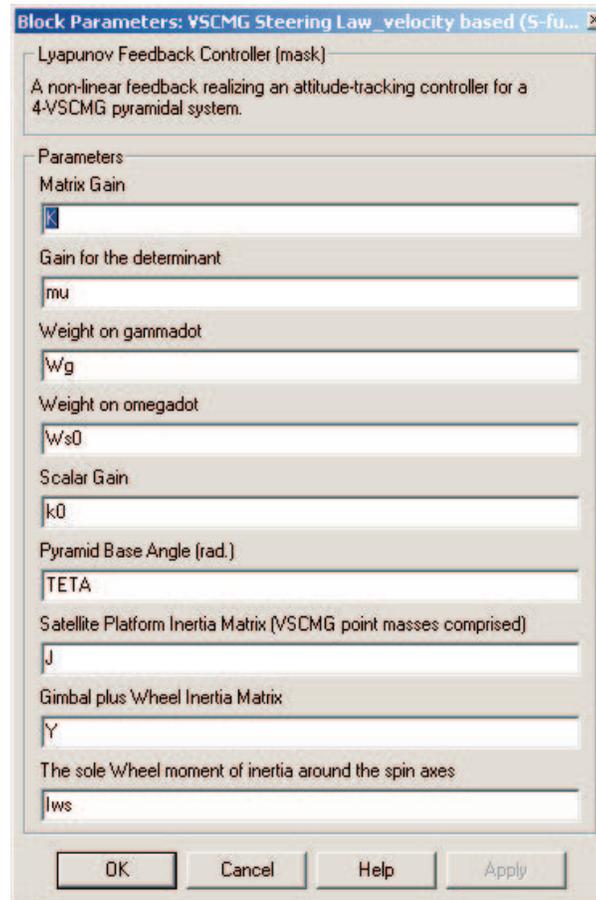


Figura 4.28: maschera del blocco V.S.C.M.G. *Steering Law-velocity based (S-function)*

All'interno ancora una *S-function* che calcola L_{rm} e blocchi per le matrici \mathbf{Q} , \mathbf{W} e il problema di minimo vincolato:

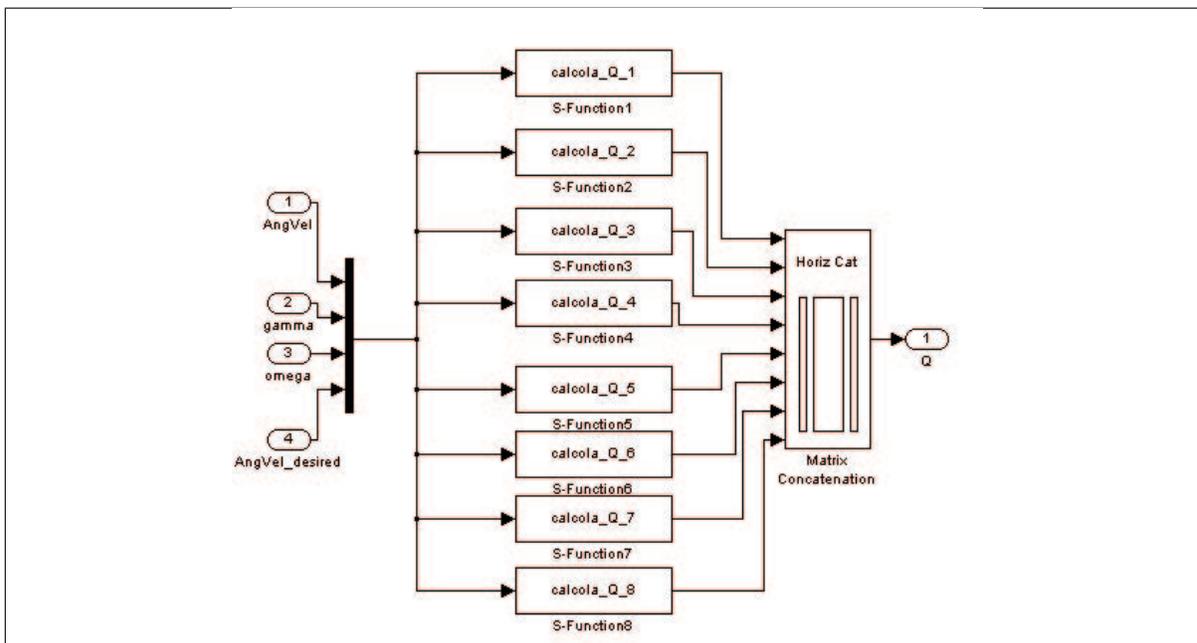


Figura 4.30: interno del blocco *evaluates the matrix Q*

Nulla aggiungiamo sul blocco non utilizzabile dell'*Acceleration Based*. La sua maschera è identica a quella di figura 4.28.

Passiamo ora al blocco del *failure mode*. Niente di nuovo per la maschera nè per come appare all'interno. Le modifiche sono a livello delle matrici \mathbf{W} (semplicemente dimezzata di dimensioni), \mathbf{Q} (anch'essa diviene 3×4 utilizzando le *S-functions* relative solo alle colonne di ordine dispari). La funzione relativa a L_{rm} è modificata come già illustrato: i contatori dei cicli saltano i valori pari. Dunque gli ingressi restano gli stessi, anche in termini di dimensioni, i segnali in più devono solo essere ignorati, non avendo influenza di nessun tipo, e, dove serve, basta aggiungere segnali nulli o qualsiasi altra cosa. L'output del blocco in questione sarà invece di dimensione dimezzata come è ovvio per soli due *V.S.C.M.G.*. Non è presente un analogo per il caso *Torque Based* in quanto, come si vedrà nel capitolo successivo, tale metodologia, seppur generale e teoricamente ineccepibile, porta a risultati fisicamente inaccettabili. A conclusione del gruppo dei controllori illustriamo brevemente il blocco *Lyapunov Function*. Il suo compito è stimare, sempre con una semplicissima *S-function*, l'espressione 2.3, per poter valutare immediatamente, durante le simulazioni, se il sistema risponde in modo stabile. L'output è quindi un segnale scalare (V), e in input si hanno:

1. AngVel: velocità angolare piattaforma ($\frac{rad}{s}$).
2. AngVel-desired: velocità angolare desiderata piattaforma ($\frac{rad}{s}$).
3. MRP-err: errore σ_e (eq.2.2) sui parametri di *Rodriguez* modificati.
4. gamma: vettore 4×1 delle posizioni angolari dei giunti (rad)

Per i motivi già illustrati non si è implementato un blocco per il *failure mode*, basta mettere a zero i due valori di γ relativi ai giunti non operativi. La maschera è:

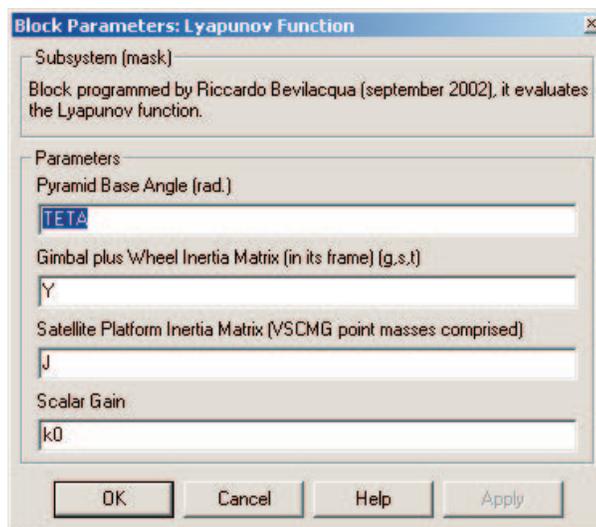


Figura 4.31: maschera del blocco *Lyapunov Function*

4.7 Perché le S-functions?

A sostegno di quanto detto nel paragrafo 4.2, riguardo la scelta di utilizzare le *S-functions* all'interno dei blocchi, riportiamo come appariva il termine atto a stimare la coppia richiesta T nel controllore del *Torque Based* con l'utilizzo di blocchi standard. Si noti l'eccessivo numero di segnali da collegare e gestire e si confronti con la semplicità e chiarezza dello schema riportato in figura 4.27:

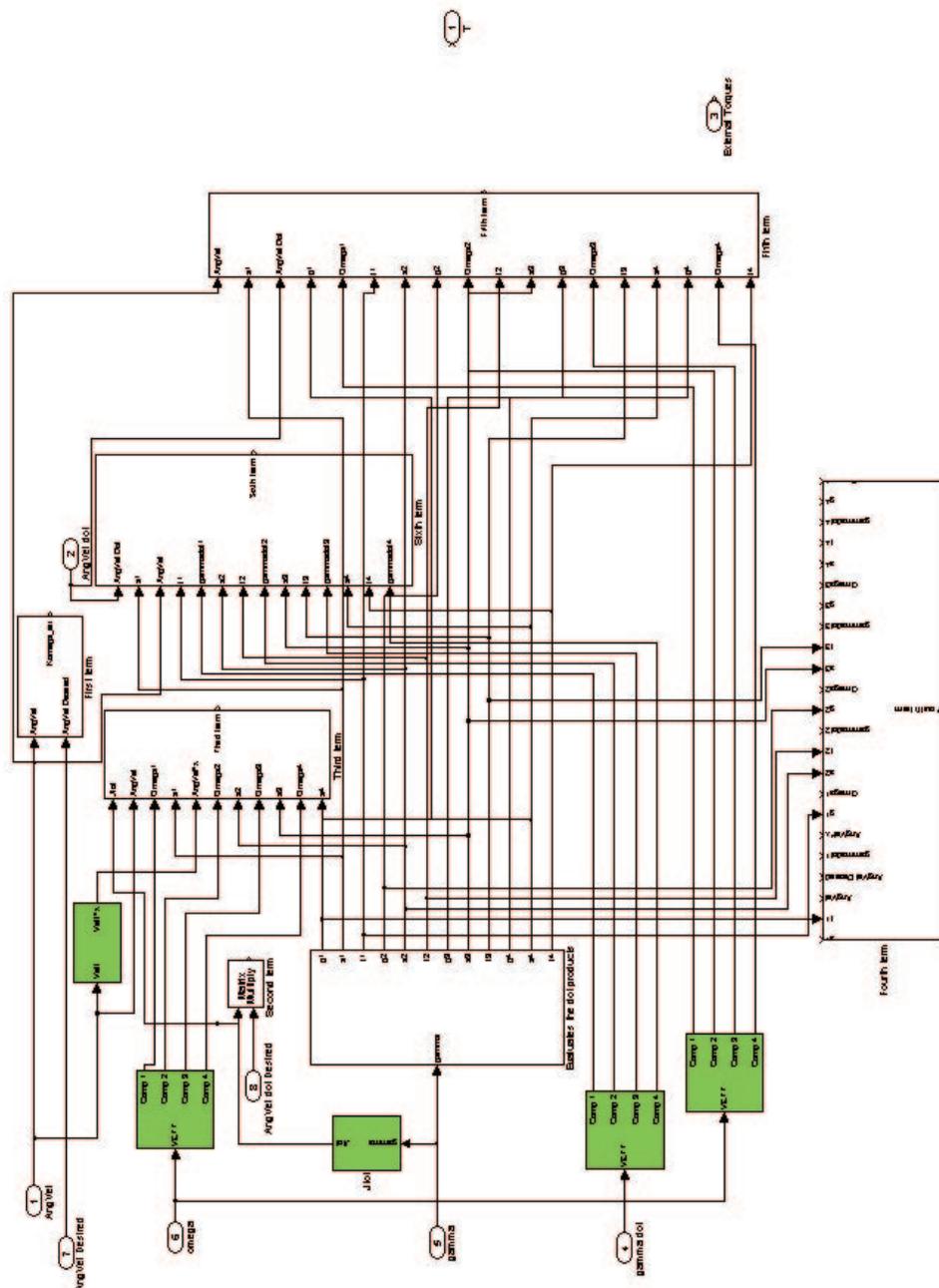


Figura 4.32: interno del blocco *Evaluates the required torque T* in V.S.C.M.G. *steering law-torque based* con blocchi. Si riporta solo a titolo di esempio per quanto concerne la complessità nell'utilizzo di blocchi. Non tutti i segnali sono collegati.

4.8 Assemblaggio: modelli completi per le simulazioni

Dopo aver descritto una per una le fondamenta necessarie alle simulazioni d'assetto, illustriamo il risultato finale: i modelli matematici ottenuti con **Simulink**[©], assemblando le varie parti. I blocchi evidenziati in rosso sono degli *scopes* e cioè semplici grafici per seguire l'andamento delle grandezze durante la simulazione. In arancio invece sono riportati i *simouts*, e cioè i blocchi che permettono di esportare in *array* (o matrici, dipende dalle dimensioni del segnale), sul *workspace* di **Matlab**[©], i valori assunti dalle grandezze ad ogni passo di integrazione. Dopodichè l'utente può decidere se salvare la simulazione, trattare i dati ottenuti, creare dei grafici, ecc.. Notiamo come il segnale relativo alle accelerazioni dei giunti $\ddot{\gamma}$ viene posto costante e pari a zero, per coerenza con quanto detto nel capitolo 3, evitando del tutto l'utilizzo di blocchi derivatori all'interno dei modelli. Nello schema relativo al *failure mode* si notano anche dei blocchi bianchi denominati *adds two zeros* che hanno il compito, appunto, di porre uguali a zero le grandezze relative ai giunti non operativi, in accordo con ciò che si è illustrato alla fine del paragrafo 4.2.

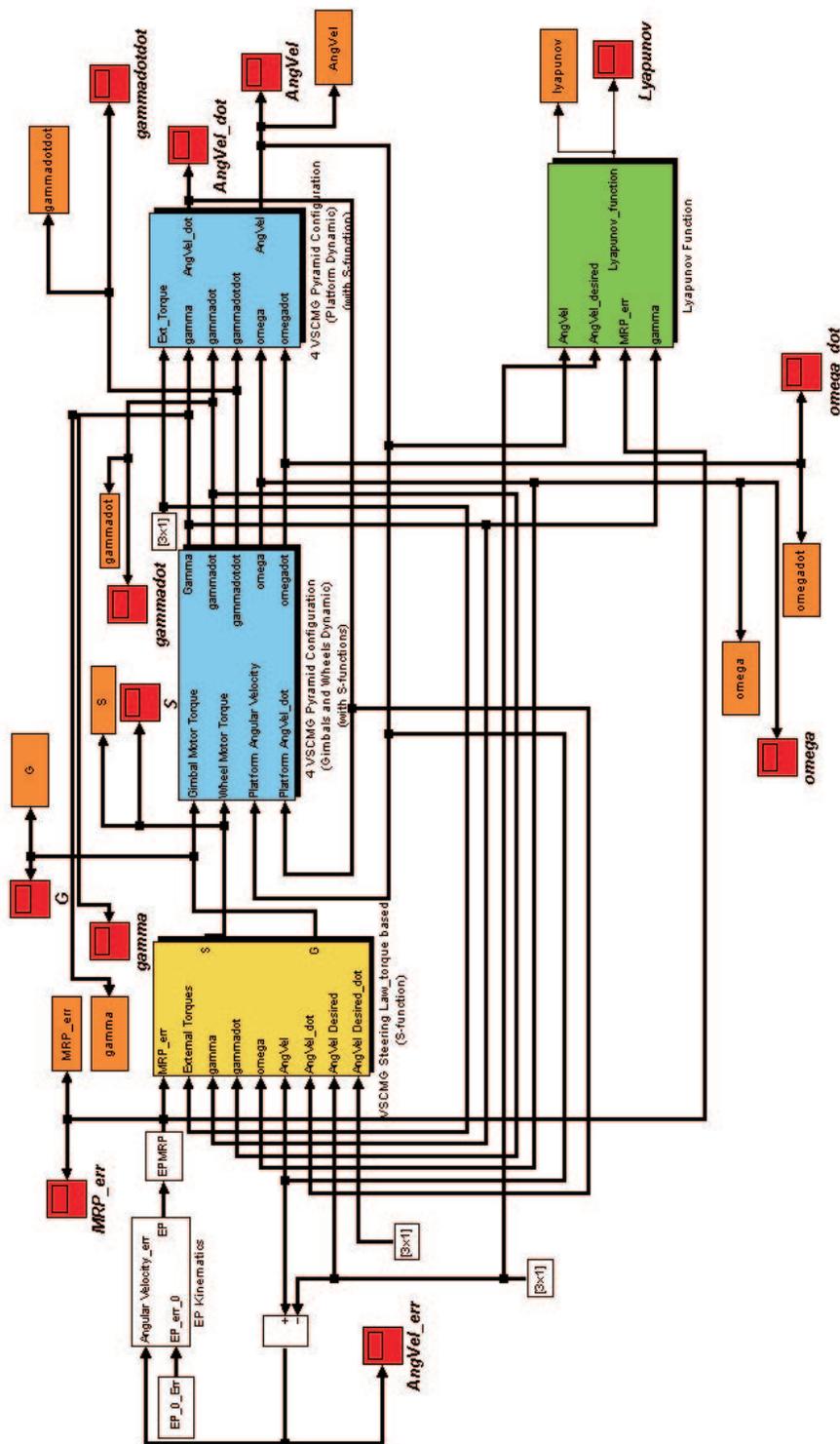


Figura 4.33: modello completo *Torque Based*

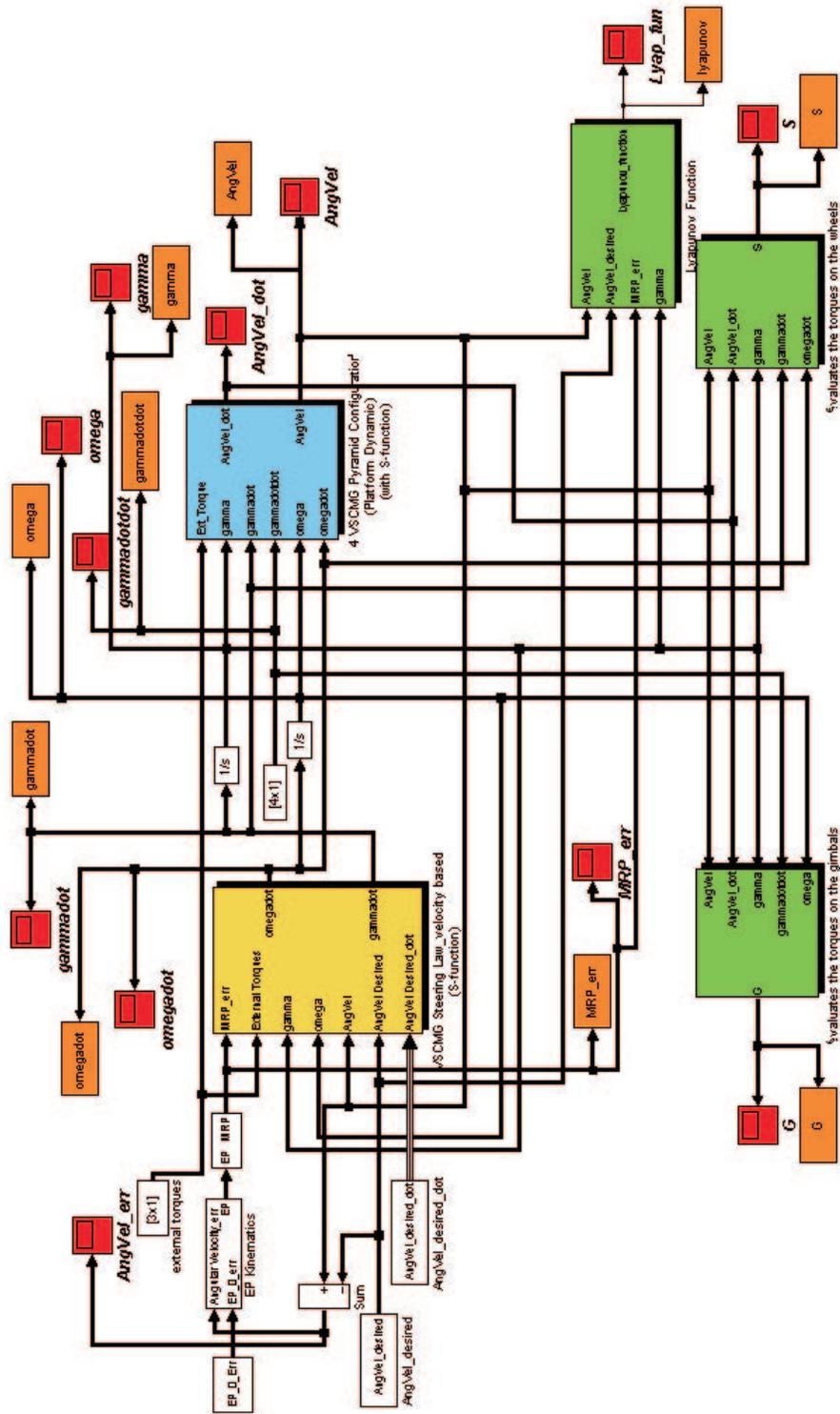


Figura 4.34: modello completo Velocity Based

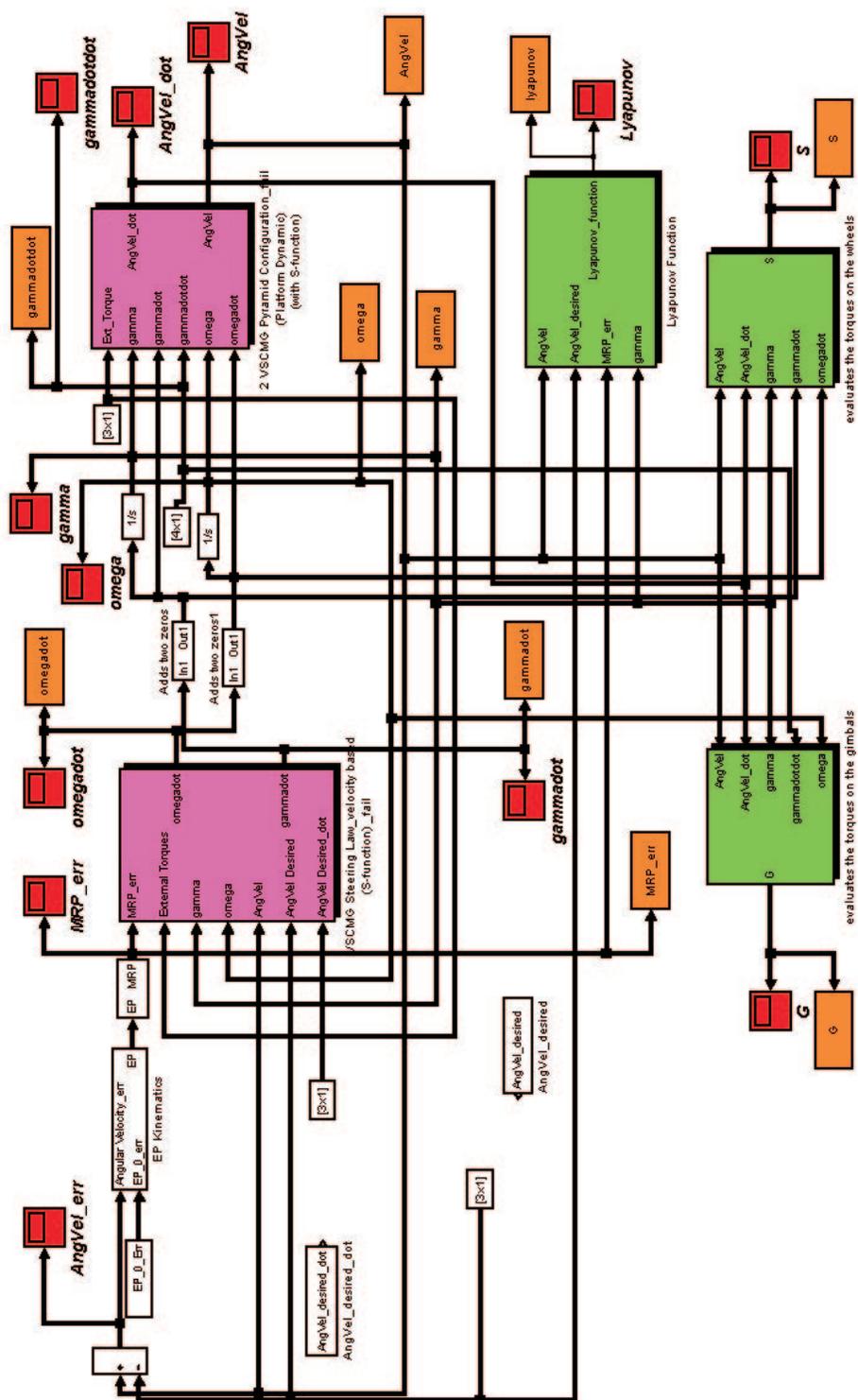


Figura 4.35: modello completo Velocity Based per il failure mode

Disabilitando il *link* tra la libreria e i blocchi dei controllori, nei modelli *Velocity Based*, si è introdotto uno *scope* e un *simout* all'interno dei blocchi che calcolano la matrice \mathbf{W} nei *feed-back*, per seguire l'evoluzione del parametro che indica la vicinanza o meno di una singolarità.

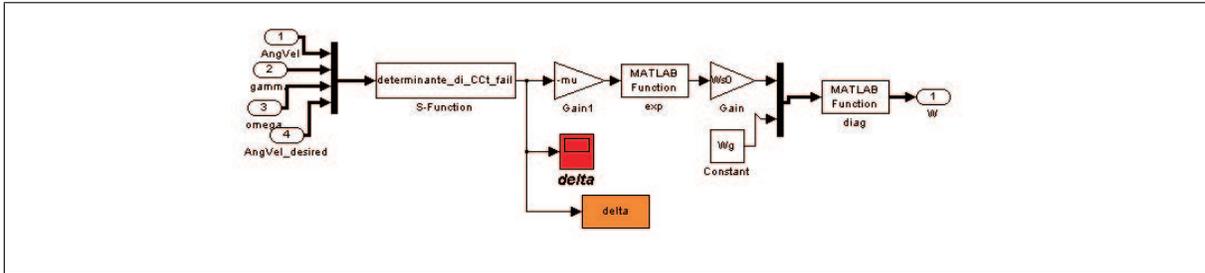


Figura 4.36: interno di *Evaluates the matrix W* con aggiunta di grafico e *simout*

4.9 Visualizzazione delle manovre

Tramite i blocchi del gruppo *New Animations*, del *Rigid Body Attitude Kinematics*, e l'ausilio di blocchi che permettono di importare in un modello **Simulink**[©] dati salvati in matrici e/o *array* come file **Matlab**[©] (si rivedano le *simouts* citate in 4.8), è possibile visualizzare il moto d'assetto della piattaforma. Il vantaggio di effettuare la rappresentazione visiva in successione alla simulazione numerica, piuttosto che in concomitanza, è palese: si può osservare il risultato della manovra in tempo reale, senza aspettare i tempi di integrazione del modello che possono essere ben diversi da quelli reali.

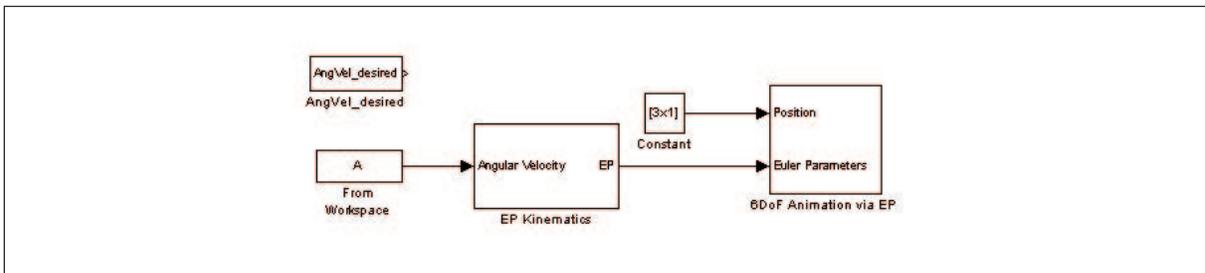


Figura 4.37: costruzione sistema per la visualizzazione del moto d'assetto

\mathbf{A} rappresenta una matrice creata nel *workspace* di **Matlab**[©]. La sua dimensione è $4 \times n$, dove n è il numero di passi di integrazione effettuati nella simulazione. La prima colonna è costituita dai valori assunti dalla variabile tempo durante l'integrazione, le restanti tre sono i corrispondenti valori delle componenti della velocità angolare della piattaforma. E' riportato anche un generatore del segnale di velocità angolare desiderata, per confrontare la manovra reale con il moto ideale che si desidera. Logicamente si è usato il blocco della cinematica che si avvale

degli EP per semplice comodità: non c'è bisogno di tradurre la condizione iniziale sull'assetto della piattaforma in un'altra rappresentazione.

4.10 Come simulare R.W. e C.M.G.

Nell'introduzione si è affermato come sia possibile effettuare delle simulazioni di controllo tramite semplici *R.W.* e *C.M.G.*, modificando leggermente i modelli e i parametri.

R.W. In questo tipo di controllo basterà cambiare la matrice dei pesi \mathbf{W} invertendo i termini variabili con quelli costanti. In questo modo le $\dot{\gamma}$ possono essere costantemente fissate sul valore nullo scegliendo un valore di μ sufficientemente elevato da far sì che l'esponenziale resti del tutto trascurabile. Si ottiene così un controllo a quattro ruote. Nulla vieta di passare a tre, impostando il valore iniziale della velocità angolare della ruota da eliminare pari a zero, e bypassando il segnale relativo alla sua derivata. La figura seguente illustra la semplice operazione appena descritta:

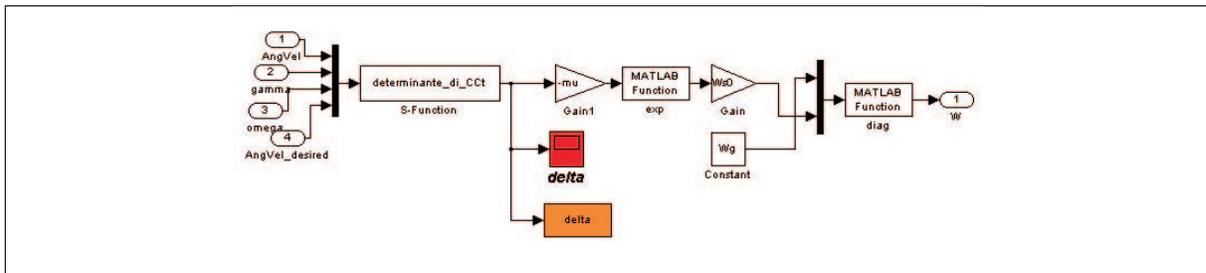


Figura 4.38: modifica all'interno del controllore del *Velocity Based*, nel blocco relativo al calcolo della matrice dei pesi \mathbf{W}

C.M.G. Per questa tipologia di controllo la modifica è ancora più semplice: basta scegliere μ elevato a sufficienza per fissare $\dot{\Omega} = 0$. Logicamente la parte di matrice relativa alle velocità dei giunti può essere modificata tramite i più disparati criteri, tra i quali i già citati metodi di *Singularity Avoidance* che esulano dai nostri interessi. Nel presente lavoro si lascerà costante, al fine di evidenziare come la manovra venga messa in crisi annullando la possibilità di aggiungere una modalità *R.W.*

Capitolo 5

Simulazioni numeriche di manovre satellitari

Nella sezione seguente è riportata una serie di simulazioni con lo scopo di dare una risposta agli obiettivi e quesiti che si sono illustrati nell'introduzione di questo lavoro. Dapprima si effettuerà un rapido confronto tra i sistemi *V.S.C.M.G.*, *R.W.* e *C.M.G.*, utilizzando il controllore *Velocity Based*. Subito dopo saranno confrontate, a mezzo di esempi, le due metodologie di controllo. A seguire si riporteranno simulazioni effettuate solo tramite *Velocity Based*, date le osservazioni derivanti dal punto precedente. Tra queste si sono scelte manovre quali quelle di *slew* ([6]), tipiche di satelliti in orbita medio bassa con il compito di effettuare un rapido monitoraggio della porzione di superficie terrestre d'interesse. Con riferimento al lavoro [22] si riporta anche una manovra in cui il satellite viene forzato a muoversi secondo una *precessione regolare*, nonostante la distribuzione delle masse non sia quella necessaria ad un moto di precessione libera (si veda l'appendice A). Nell'articolo citato viene illustrata una manovra di rapida rotazione attorno ad un asse corpo e la precessione regolare dello stesso attorno alla linea di congiunzione col Sole. Lo scopo è di ottenere una mappatura delle radiazioni cosmiche di fondo nella gamma delle microonde. Senza entrare nel dettaglio del problema appena menzionato, basti dire che il tipo di manovra è stato preso come spunto per illustrare le capacità di controllo dei *V.S.C.M.G.*; nella precessione qui simulata i valori di velocità richiesti saranno particolarmente elevati, per mostrare la versatilità del sistema di controllo. Nel riportare questi due tipi di manovra effettueremo una contemporanea analisi dell'influenza dei parametri controllo. Infine alcune manovre saranno effettuate nel caso di *failure mode*.

5.1 Confronto sistemi di fly-wheels

5.1.1 R.W.

Con la modifica riportata nel paragrafo 4.10, relativamente alle ruote di momento, si riporta una manovra di correzione d'assetto e annullamento della velocità angolare. La posizione iniziale dei giunti resta fissa. E' necessario porre attenzione alla scelta di tale configurazione: se gli assi di spin appartengono allo stesso piano la simulazione restituisce un messaggio di errore.

Il motivo è ovvio: si opererebbe un controllo con quattro ruote che non hanno la possibilità di erogare coppia in tutto lo spazio tridimensionale, ma solo su di un piano. Con il vettore γ_0 scelto si garantisce la possibilità di controllare in 3 – D . I dati per la simulazione sono:

Simbolo	Valore scelto	Unità di misura
θ	54.75	deg.
\mathbf{J}	$\begin{bmatrix} 86.215 & 0 & 0 \\ 0 & 85.07 & 0 \\ 0 & 0 & 113.565 \end{bmatrix}$	kg m ²
\mathbf{Y}_j	$\begin{bmatrix} 0.13 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 \end{bmatrix}$	kg m ²
$I_{s_j}^w$	0.1	kg m ²
Y_{g_i}	0.03	kg m ²

Tabella 5.1: Valori scelti per la distribuzione delle masse di un sistema V.S.C.M.G..

Simbolo	Valore scelto	Unità di misura
$\Omega(0)$	$[14, 14, 14, 14]^T$	$\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$
$\gamma(0)$	$[0, \frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}]^T$	rad.
$\dot{\gamma}(0)$	$[0, 0, 0, 0]^T$	$\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$
$\omega_b(0)$	$[0.01, 0.05, -0.01]^T$	$\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$
$[\vec{\epsilon}(0), \eta(0)]$	$[0.6362, 0.4610, 0.3074, 0.5368]^T$	-
g_b	$[0, 0, 0]^T$	Nm
μ	10^9	-
k_0	1.7	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{sec.}^2}$
\mathbf{K}	$\begin{bmatrix} 13.13 & 0 & 0 \\ 0 & 13.04 & 0 \\ 0 & 0 & 15.08 \end{bmatrix}$	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{sec.}}$
W_{s0}	2	-
W_g	1	-

Tabella 5.2: Parametri scelti per la simulazione.

L'obiettivo è portare a zero la velocità angolare e il vettore dei parametri di Eulero al valore $[0, 0, 0, 1]^T$ (allineamento assi corpo con assi della terna inerziale). La rapidità della manovra è dettata dal valore \mathbf{K} con cui la funzione di *Lyapunov* decresce. La simulazione riporta i dati per 500sec. di manovra, integrati tramite un metodo *fixed step* di passo 0.1sec..

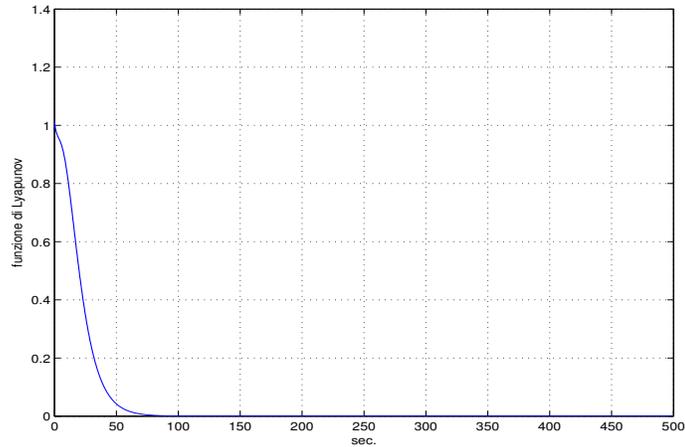


Figura 5.1: andamento funzione di *Lyapunov*

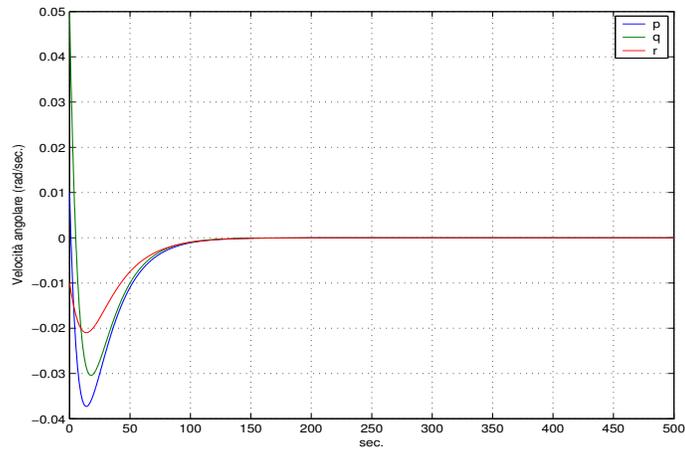


Figura 5.2: andamento della velocità angolare

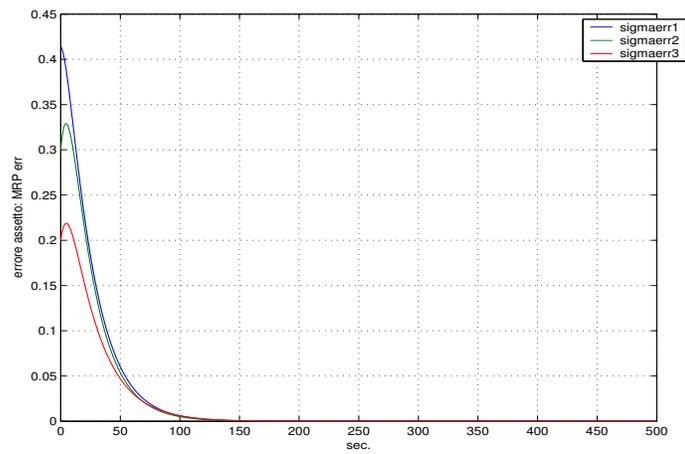


Figura 5.3: andamento dell'errore sugli MRP

Gli sforzi di controllo necessari sono dunque riportati in termini di coppie sulle ruote, accelerazioni delle stesse e velocità di *spin* raggiunte dopo la manovra:

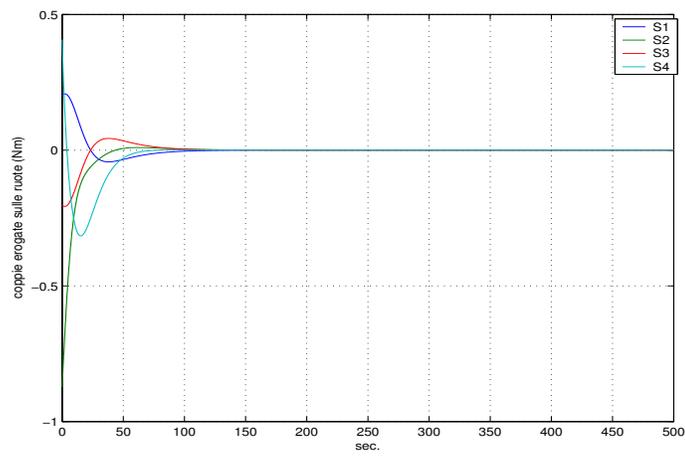


Figura 5.4: andamento delle coppie erogate sulle *R.W.*

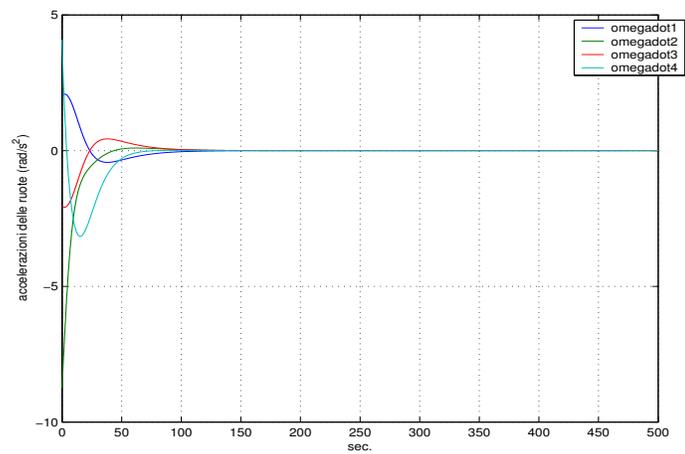


Figura 5.5: andamento delle accelerazioni delle *R.W.*

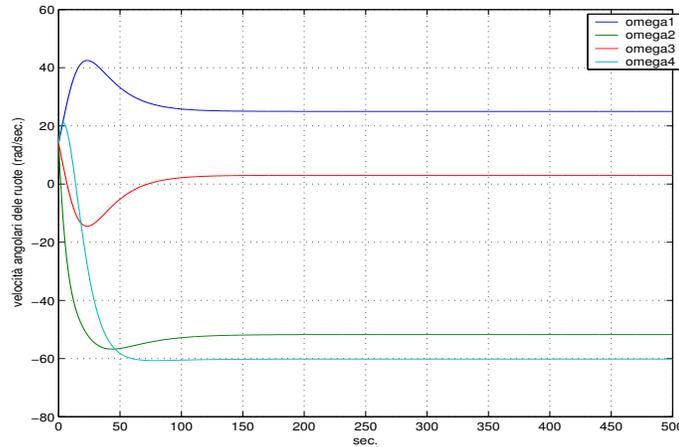
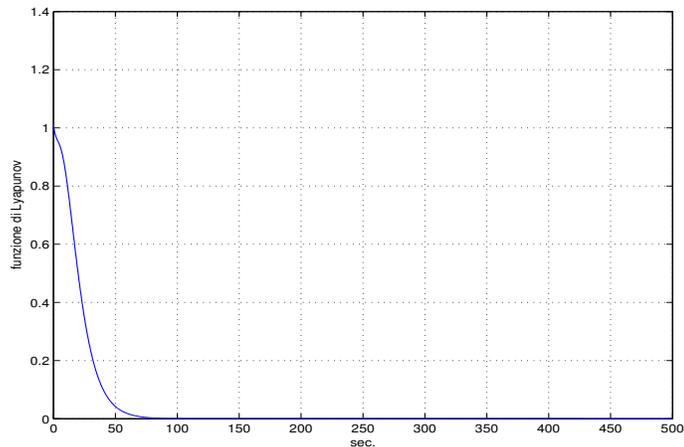


Figura 5.6: andamento delle velocità di *spin* delle *R.W.*

Osserviamo come ovviamente lo sforzo di controllo (coppie/accelerazioni) sia limitato alla fase in cui sussiste un errore sullo stato diverso da zero. Due ruote arrivano a stabilizzarsi intorno ai $50 - 60 \frac{rad}{sec}$, delle restanti una si arresta su uno *spin* minore del valore iniziale, l'altra a circa $25 \frac{rad}{sec}$. Osserveremo quindi come la stessa manovra richieda velocità delle ruote più modeste se effettuata con un sistema *V.S.C.M.G.*, grazie all'effetto di amplificazione della coppia.

5.1.2 C.M.G.

Riportiamo ora la stessa manovra, effettuata modificando il modello 4.34 per operare in modalità *C.M.G.*. Lo scopo della simulazione è di evidenziare come tali dispositivi soffrano il problema degli stati singolari. Senza quindi utilizzare leggi del tipo *singularity avoidance* (che peraltro, come già detto, hanno comunque delle problematiche di deviazione nel controllo) andiamo a notare qual'è il comportamento del sistema in condizioni di singolarità. Per far questo forziamo il sistema a partire da uno stato singolare, notando come inoltre se ne incontri un successivo durante la semplice manovra. I valori scelti per la simulazione sono quelli delle tabelle 5.1 e 5.2. Cambia solo il vettore γ_0 che si sceglie in modo da porre i quattro assi trasversi paralleli ad uno stesso piano: $\gamma_0 = [0; \frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}]^T$. Come ci si aspetta la funzione di *Lyapunov* è identica al caso delle *R.W.*, non avendo modificato nè k_0 nè \mathbf{K} :

Figura 5.7: andamento funzione di *Lyapunov*

Non riportiamo gli andamenti dello stato, essendo identici. E' necessario focalizzare l'attenzione sui grafici relativi alle velocità dei giunti:

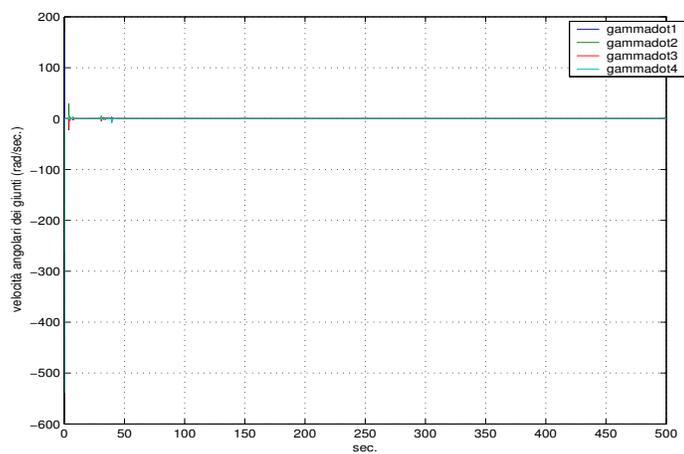


Figura 5.8: andamento velocità dei giunti

Ingrandendo sull'istante iniziale si nota come le grandezze partano da valori elevatissimi per poi andare a zero all'istante successivo di integrazione, cioè in $0.1sec.$:

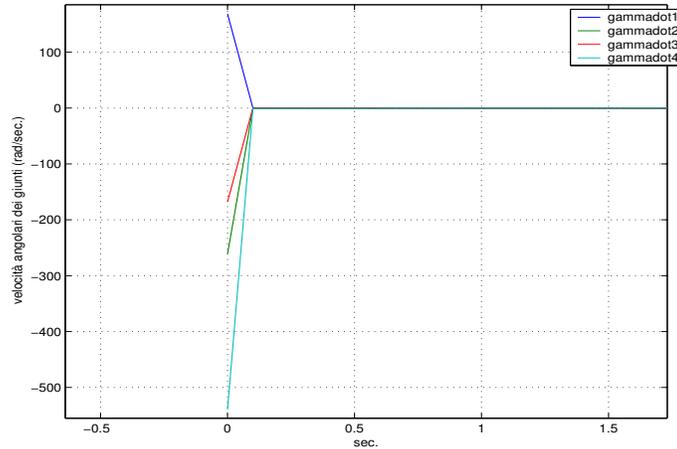


Figura 5.9: zoom sull'istante iniziale per le velocità dei giunti

Un rapida stima di calcolo sulle eventuali accelerazioni dà un'ordine di grandezza di $10^3 \frac{rad}{sec.^2}$! E' ovvio che, diminuendo il passo di integrazione, tale stima cresce di ordine di grandezza. Il perchè è presto spiegato: il comportamento così brusco delle $\dot{\gamma}$ è da ricercarsi nell'aver imposto una configurazione iniziale singolare: è come aver dato un ingresso a gradino al sistema. Nella realtà significa che lo stato singolare porterebbe ad accelerare enormemente i giunti, cosa non auspicabile per i dispositivi, con conseguenti deviazioni dal controllo desiderato. Un secondo stato singolare, o comunque l'approssimarsi di questo, lo notiamo in prossimità dei 4sec.:

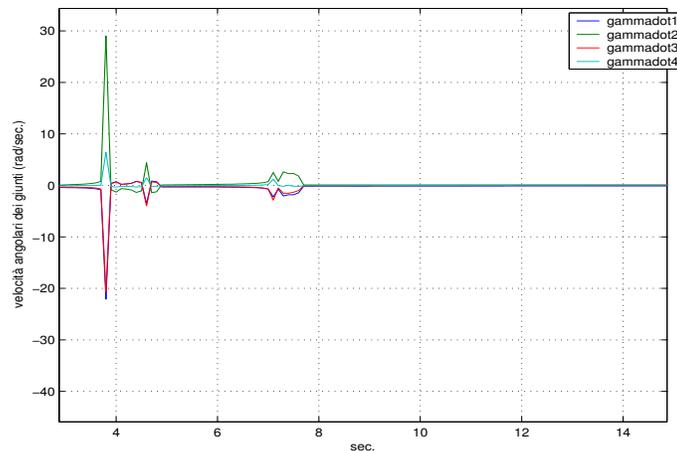


Figura 5.10: zoom sulla seconda singolarità

Osserviamo la concomitanza delle singolarità con l'annullamento del parametro δ scelto a rappresentarla:

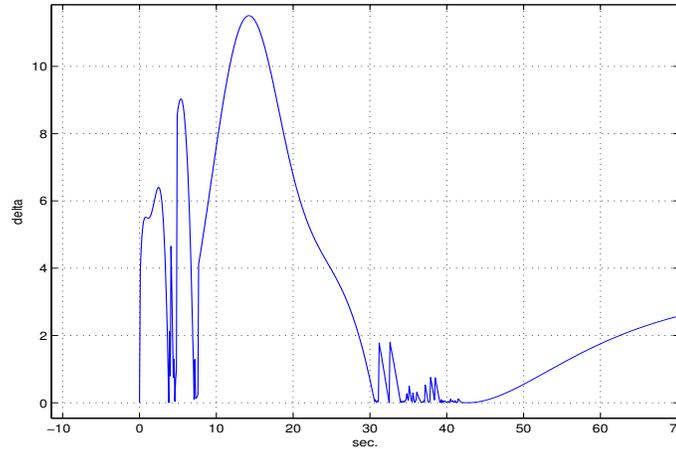


Figura 5.11: ingrandimento delle due singolarità in termini di δ

Questi andamenti hanno ripercussione sulle posizioni dei giunti che presentano dei veri e propri balzi da un valore all'altro in corrispondenza delle irregolarità dei $\dot{\gamma}$:

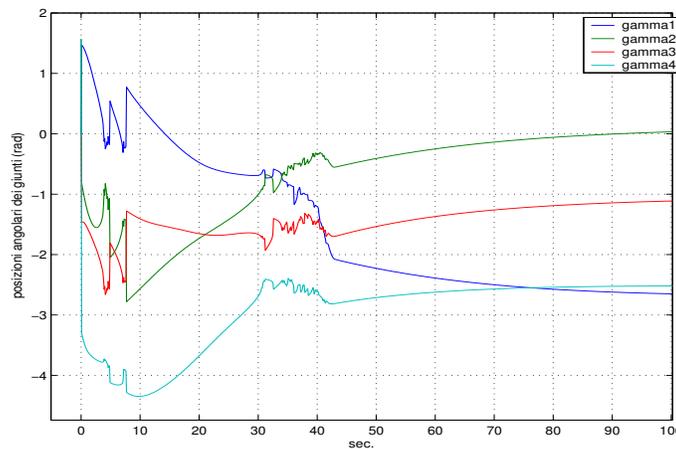


Figura 5.12: zoom sulla prima fase della simulazione per le posizioni dei giunti

Fisicamente questo comportamento non è di certo possibile. La conclusione è che il sistema *C.M.G.*, se non gestito in maniera del tutto mirata, non permette di controllare in modo continuo la piattaforma.

5.1.3 V.S.C.M.G.

Partendo dalla stessa configurazione di singolarità iniziale, andiamo a notare come le grandezze in gioco si comportano in maniera del tutto diversa ammettendo una logica di controllo che gestisca gli stati singolari azionando la modalità *R.W.* I dati sono gli stessi della simulazione del paragrafo 5.1.2, solo μ è scelto pari a 10^{-9} . Ancora, la funzione di *Lyapunov*, e quindi

l'evoluzione dello stato, restano identici ai casi precedenti e non saranno dunque riportati. Notiamo come le velocità delle ruote presentino un incremento piuttosto rapido in concomitanza con la fase iniziale di singolarità:

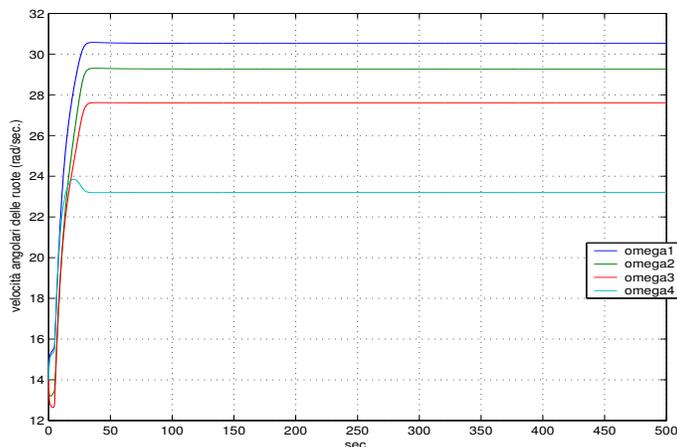


Figura 5.13: velocità di *spin* delle ruote nel caso *V.S.C.M.G.*

Le relative accelerazioni partono quindi da valori diversi da zero, per erogare la coppia necessaria al controllo all'inizio della manovra. Si riporta solo un ingrandimento della fase iniziale dopodichè le accelerazioni sono nulle:

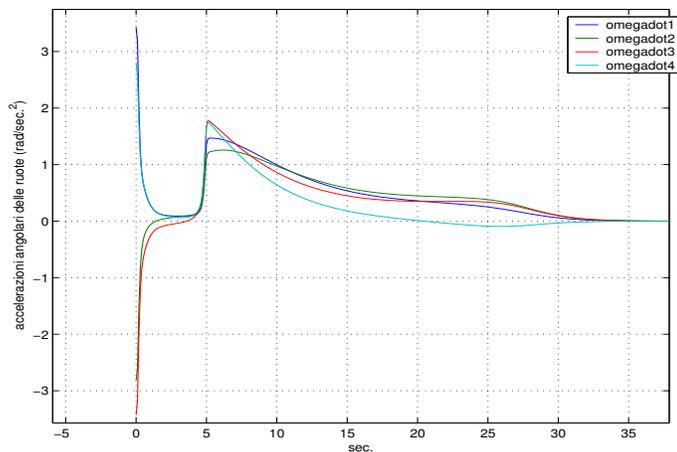
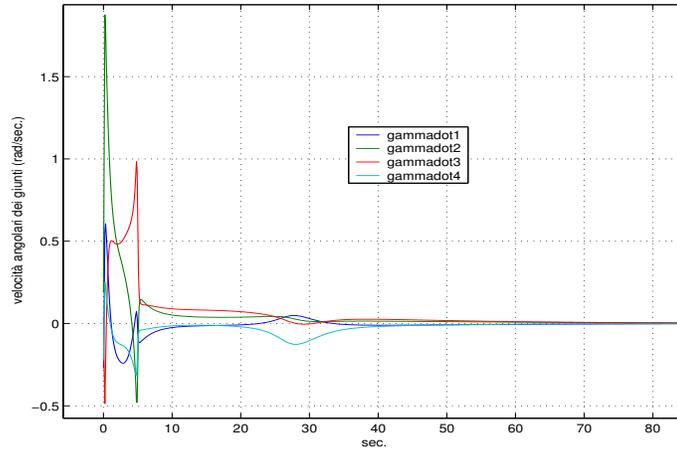
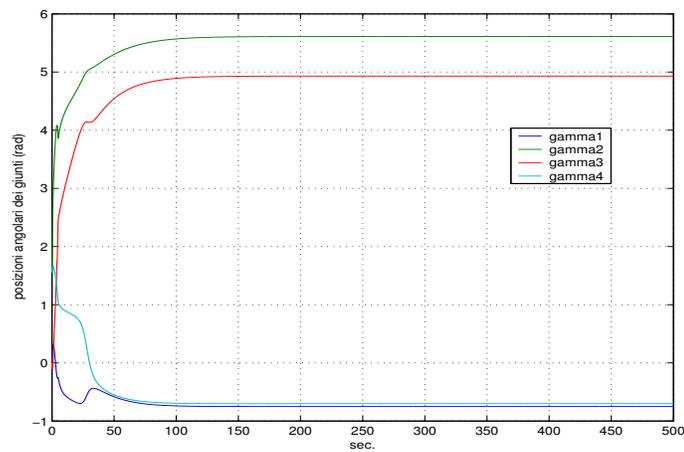


Figura 5.14: accelerazioni delle ruote nel caso *V.S.C.M.G.*

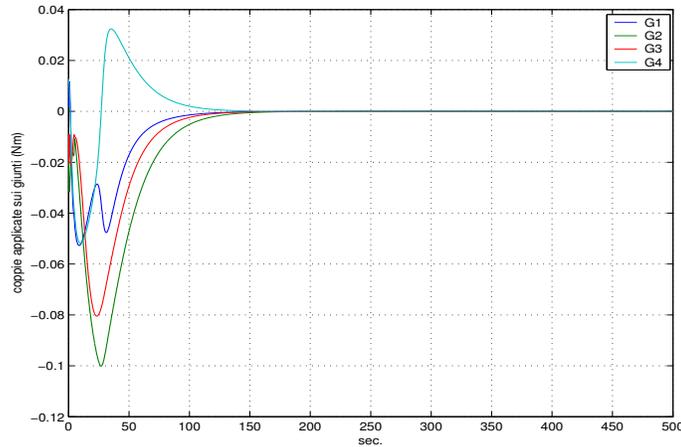
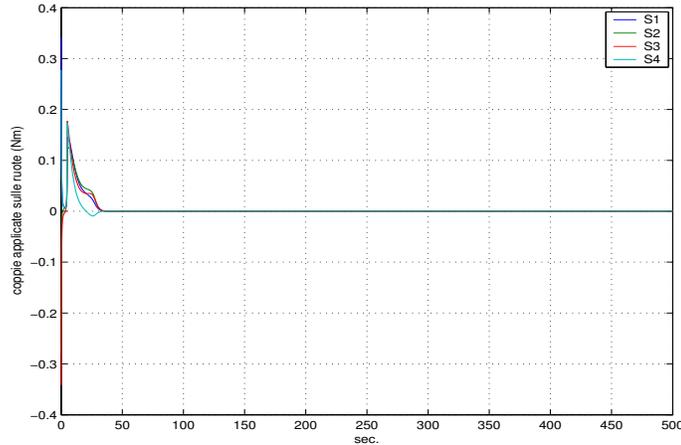
Di particolare interesse a questo punto sono i relativi andamenti delle $\dot{\gamma}$. Di nuovo, si riporta un ingrandimento della fase iniziale, l'unica dove tali grandezze sono diverse da zero:

Figura 5.15: velocità dei giunti nel caso *V.S.C.M.G.*

I giunti avranno la seguente evoluzione:

Figura 5.16: posizioni dei giunti nel caso *V.S.C.M.G.*

Gli sforzi di controllo, in termini di coppie, saranno:

Figura 5.17: coppie sui giunti nel caso *V.S.C.M.G.*Figura 5.18: coppie sulle ruote nel caso *V.S.C.M.G.*

5.1.4 Risultato confronto

Comparando gli andamenti riportati per la stessa manovra, con i tre diversi dispositivi, notiamo una serie di differenze sostanziali che avvalorano la tesi del vantaggio nell'utilizzo della logica *V.S.C.M.G.*:

- Nel caso delle *R.W.* non si notano problemi nell'effettuare la manovra. Il vantaggio dei *V.S.C.M.G.* risiede nel fatto che le velocità di *spin* vengono mantenute più modeste, ad evidenziare quindi la tendenza alla saturazione propria delle *R.W.*. Con un sistema *V.S.C.M.G.* si possono senz'altro effettuare manovre ripetute nel tempo andando a limitare la possibilità di saturare i dispositivi.
- L'aver forzato l'esistenza di una configurazione singolare ha messo in luce in maniera molto chiara il difetto principale dei *C.M.G.*. Nelle applicazioni il problema viene af-

frontato con tecniche che impediscono al sistema di raggiungere tali posizioni. Come si può immaginare questo approccio limita fortemente la mobilità dei giunti e potrebbe ripercuotersi comunque in errori sulla traiettoria della piattaforma. L'utilizzo di *V.S.C.M.G.* ci permette, in un certo senso, di dimenticarci delle singolarità: se si verificano vengono azionate le ruote senza preoccuparsi della posizione dei giunti.

E' immediato comprendere come i *V.S.C.M.G.* uniscano i vantaggi dei due precedenti sistemi, limitando fortemente le problematiche che essi presentano individualmente. La logica *Velocity Based* non garantisce a priori che le accelerazioni dei giunti restino trascurabili, ma di certo limita estremamente la possibilità che esse esplodano. Solo con un opportuno dimensionamento del controllore, e delle condizioni iniziali, per la manovra scelta, si può mantenere il tasso di variazione delle $\dot{\gamma}$ al di sotto di una certa tolleranza, come si vedrà più avanti.

5.2 Confronto Velocity Based-Torque Based

In questo paragrafo si riportano delle manovre effettuate con le metodologie *Velocity Based* e *Torque Based*. Partiamo dalla semplice manovra illustrata nel paragrafo 5.1. I dati sono gli stessi, solo il vettore γ_0 ora è una posizione generica non singolare per i giunti ($\gamma_0 = [0, 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]^T$). Nel caso *Velocity Based* i cambiamenti sono alquanto modesti. La funzione di *Lyapunov* risulta:

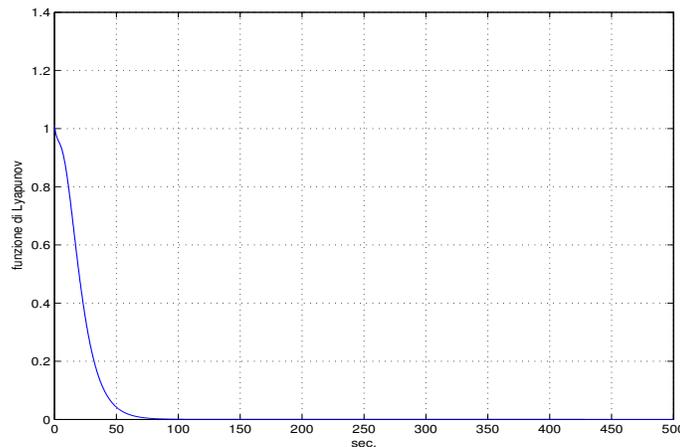


Figura 5.19: funzione di *Lyapunov*

La velocità angolare e l'errore sull'assetto evolvono come già riportato nelle figure 5.2 e 5.3. Le ruote accelerano fino a valori pressochè identici al caso di figura 5.13.

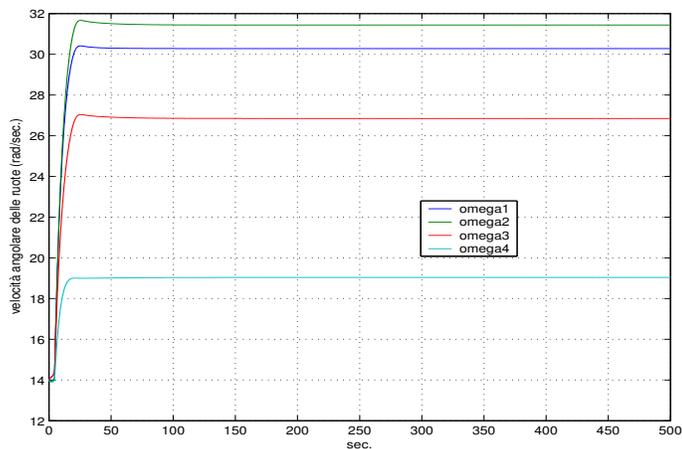


Figura 5.20: velocità di rotazione delle ruote

La differenza si nota solo nei primi istanti della manovra in quanto, nel paragrafo 5.1.3 il sistema partiva da una configurazione singolare e doveva da subito sfruttare la modalità *R.W.*. Dunque, anche le accelerazioni delle ruote saranno diverse, in particolare più basse all' inizio:

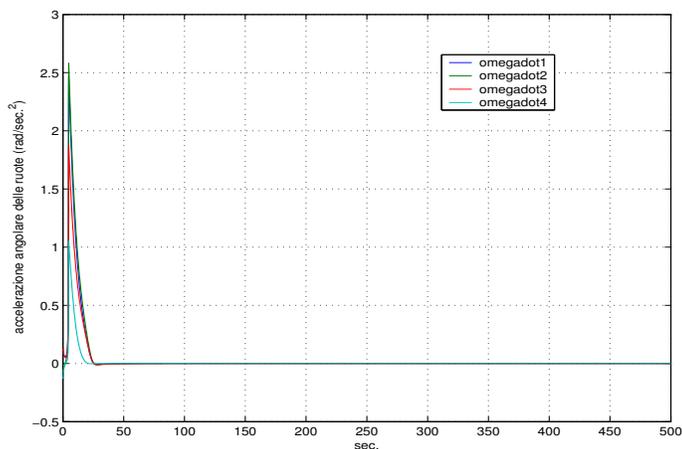


Figura 5.21: accelerazioni delle ruote

Per quanto riguarda i giunti si ha:

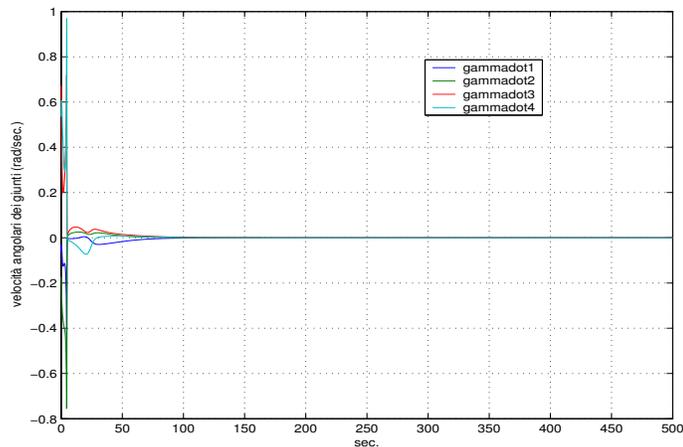


Figura 5.22: velocità dei giunti

Per cui le posizioni dei *gimbals* sono:

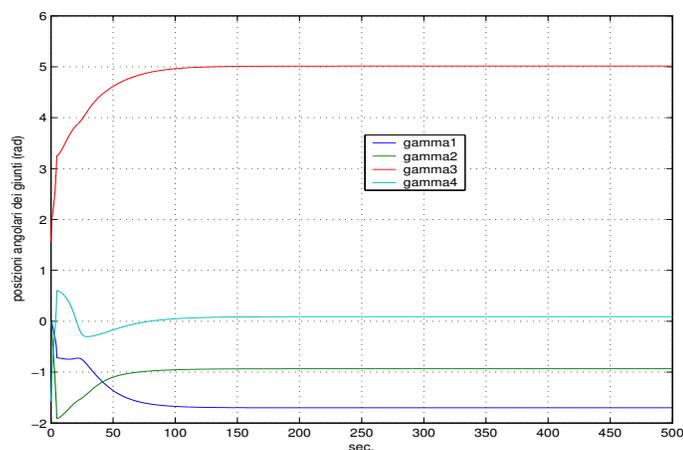


Figura 5.23: posizioni dei giunti

Poco cambia rispetto al paragrafo 5.1.3.

Ben diverso è il comportamento delle variabili nel caso *Torque Based*. La funzione di *Lyapunov*, e di conseguenza lo stato, evolvono in maniera identica. Il problema nasce nell'ambito delle variabili di controllo. Iniziamo riportando gli andamenti delle grandezze relative ai giunti. In questo tipo di approccio si è in grado di riportare anche l'andamento del vettore $\ddot{\gamma}$ in quanto legato algebricamente alle coppie di controllo:

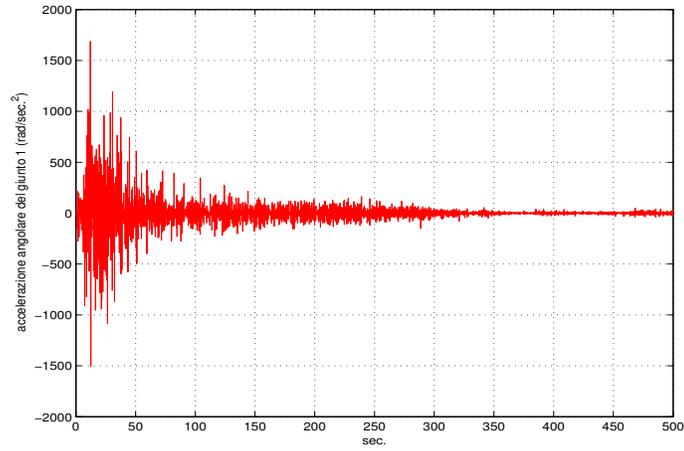


Figura 5.24: accelerazione primo giunto

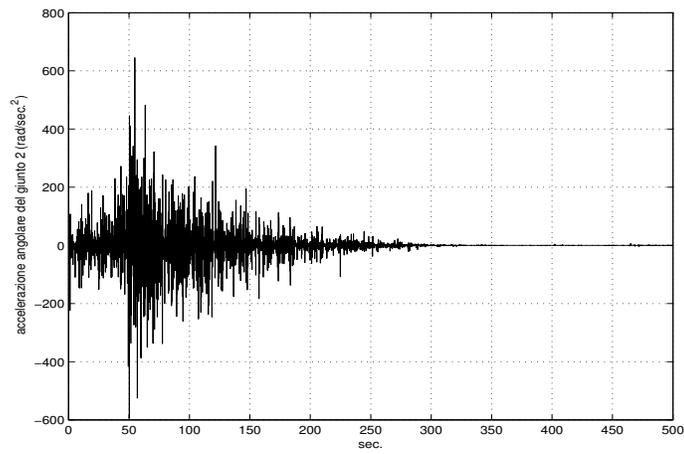


Figura 5.25: accelerazione secondo giunto

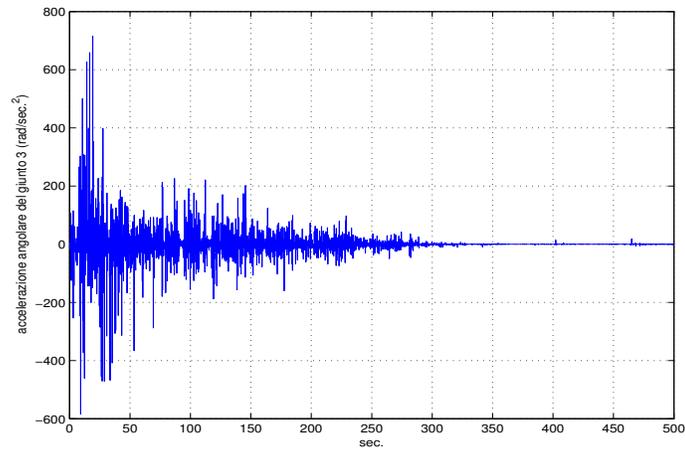


Figura 5.26: accelerazione terzo giunto

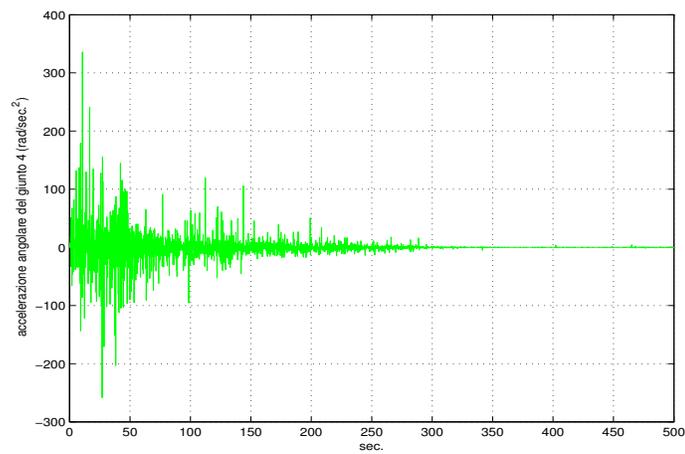


Figura 5.27: accelerazione quarto giunto

L'integrazione dà le velocità:

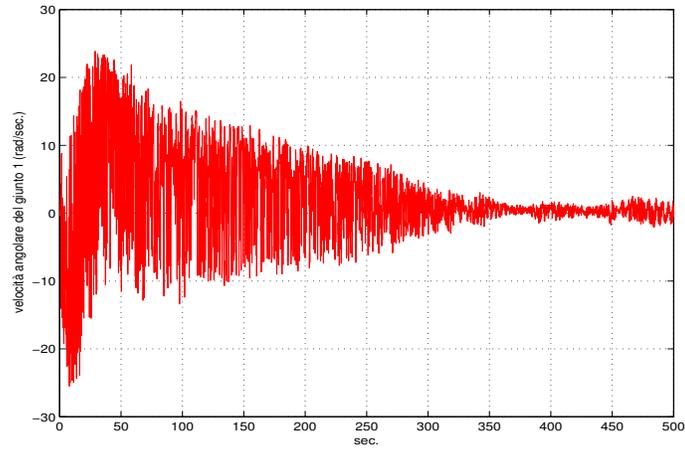


Figura 5.28: velocità primo giunto

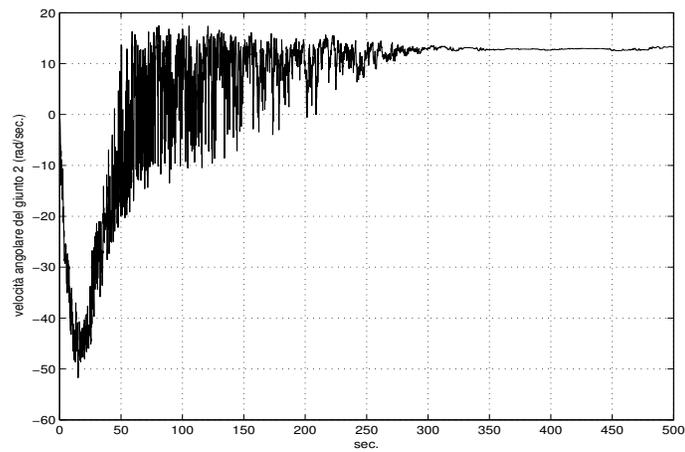


Figura 5.29: velocità secondo giunto

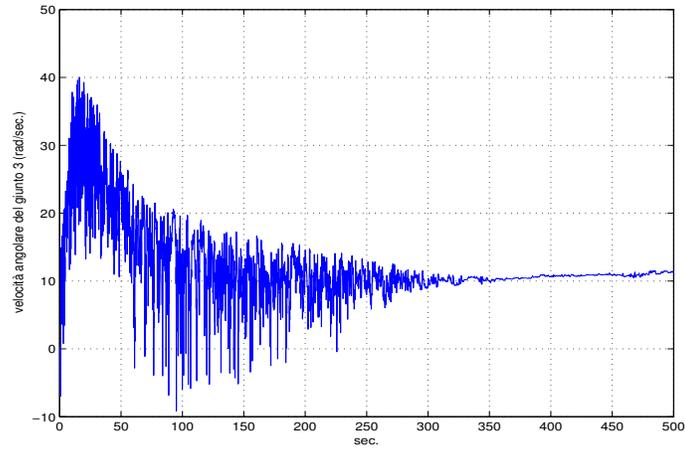


Figura 5.30: velocità terzo giunto

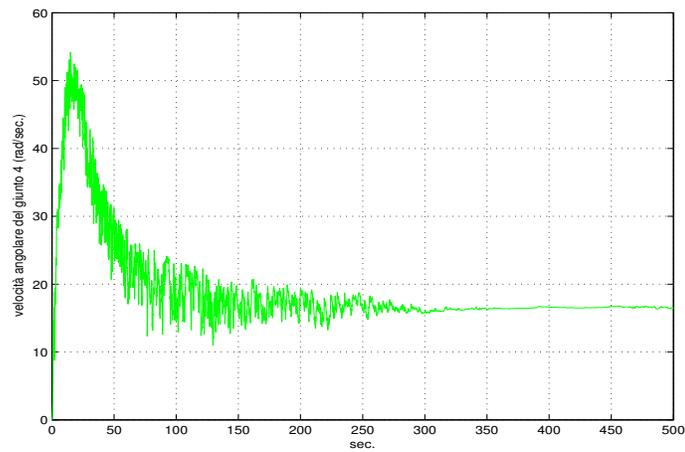


Figura 5.31: velocità quarto giunto

Per quanto concerne le ruote si ottiene:

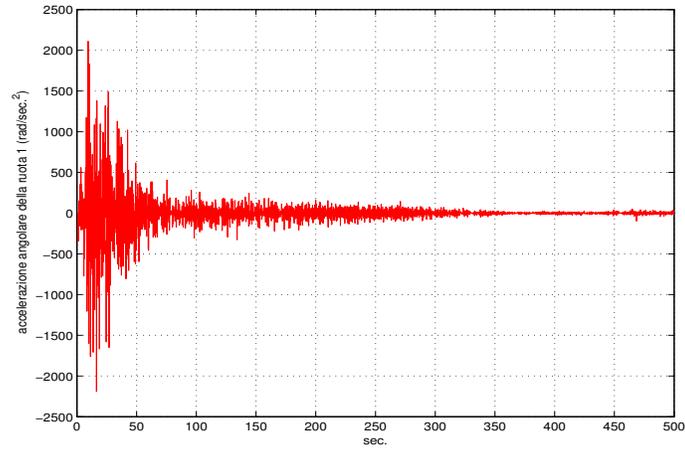


Figura 5.32: accelerazione prima ruota

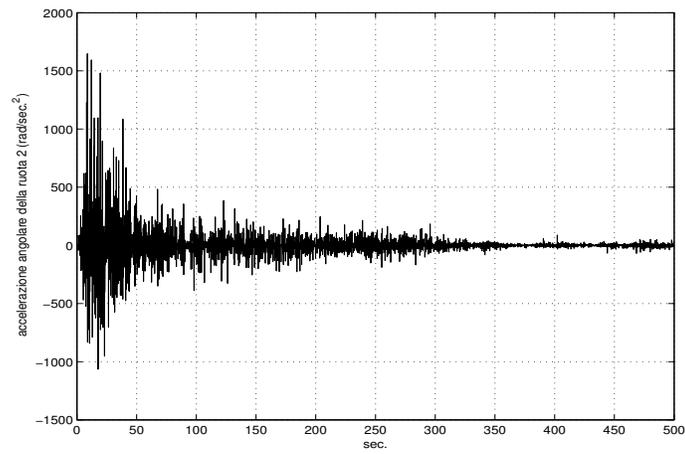


Figura 5.33: accelerazione seconda ruota

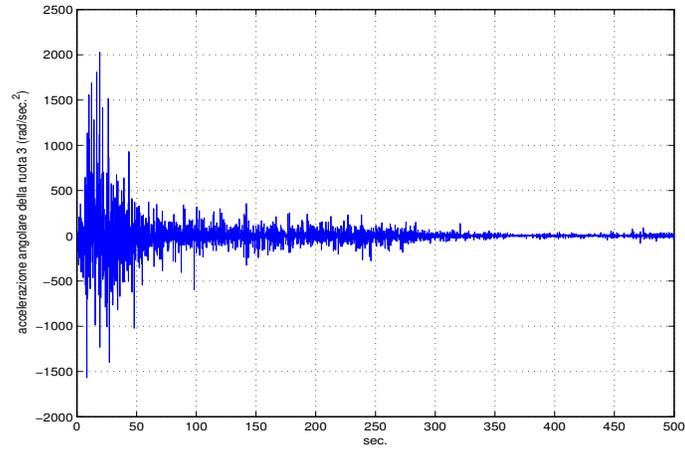


Figura 5.34: accelerazione terza ruota

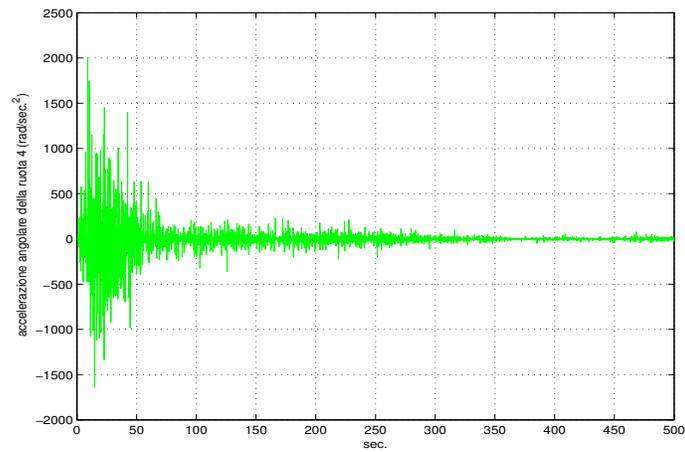


Figura 5.35: accelerazione quarta ruota

Ancora, per integrazione:

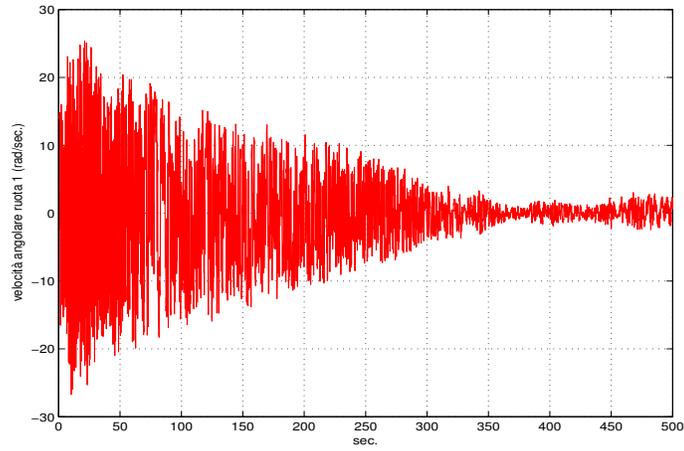


Figura 5.36: velocità prima ruota

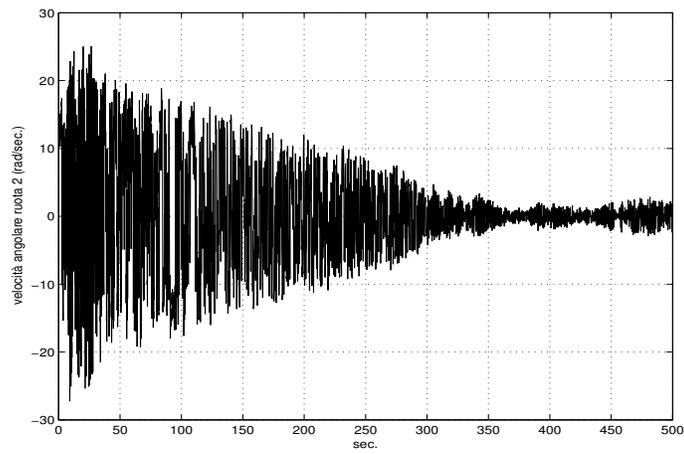


Figura 5.37: velocità seconda ruota

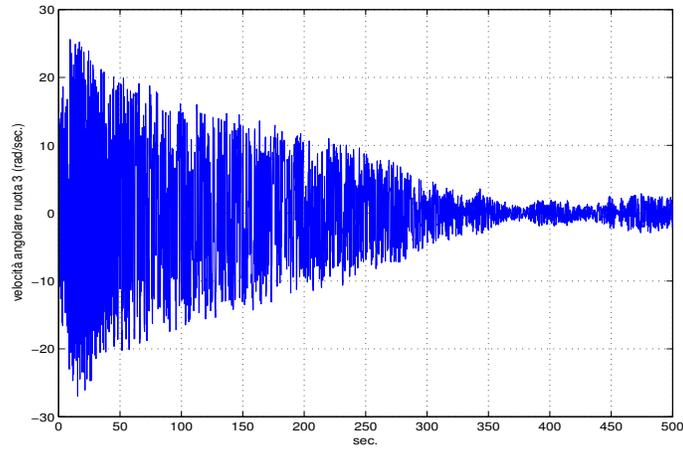


Figura 5.38: velocità terza ruota

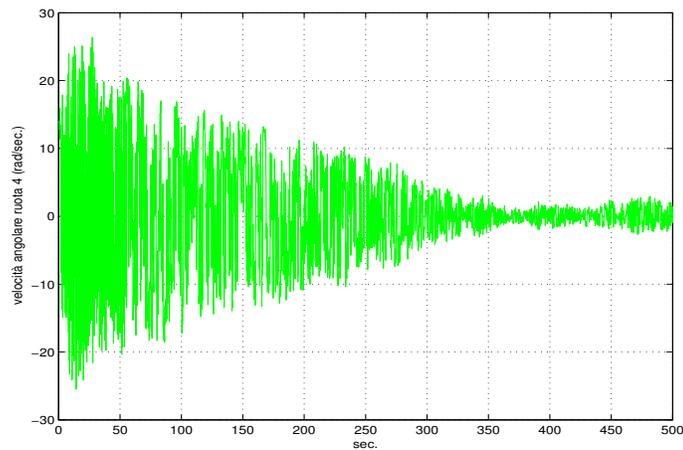


Figura 5.39: velocità quarta ruota

Già da questi grafici possiamo dedurre che la filosofia di controllo, nonostante la sua generalità, non risulta fisicamente applicabile. Per convincersene basti dare uno sguardo ai valori di coppia che sarebbero necessari:

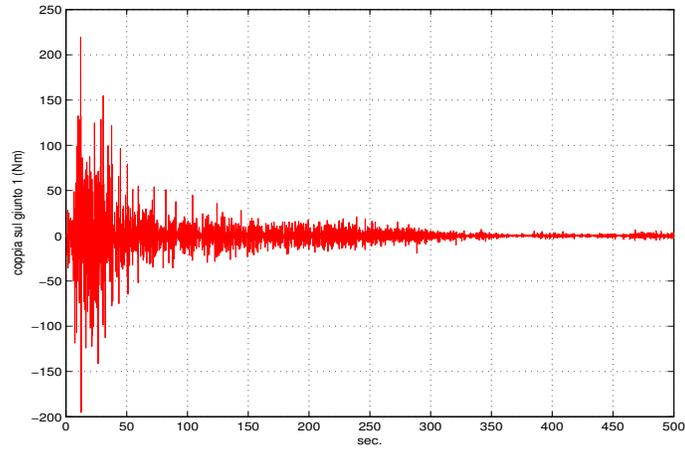


Figura 5.40: coppia erogata sul primo giunto

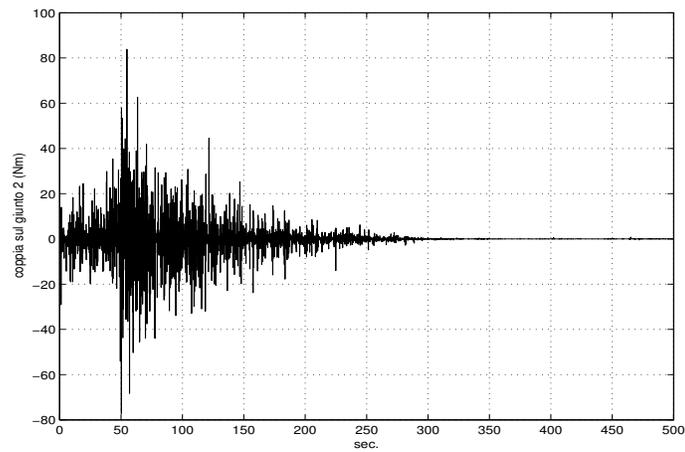


Figura 5.41: coppia erogata sul secondo giunto

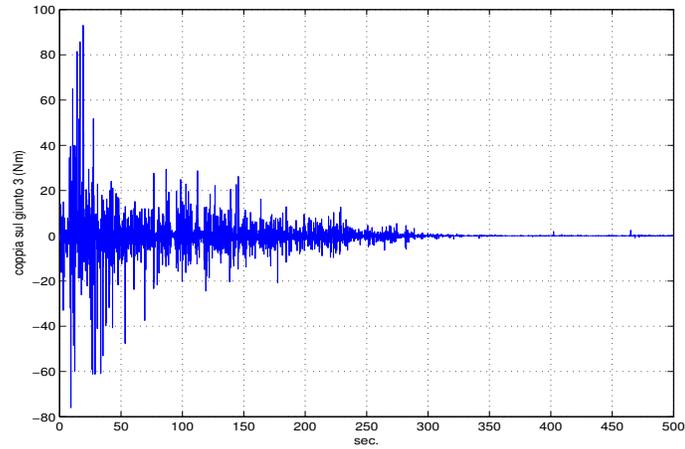


Figura 5.42: coppia erogata sul terzo giunto

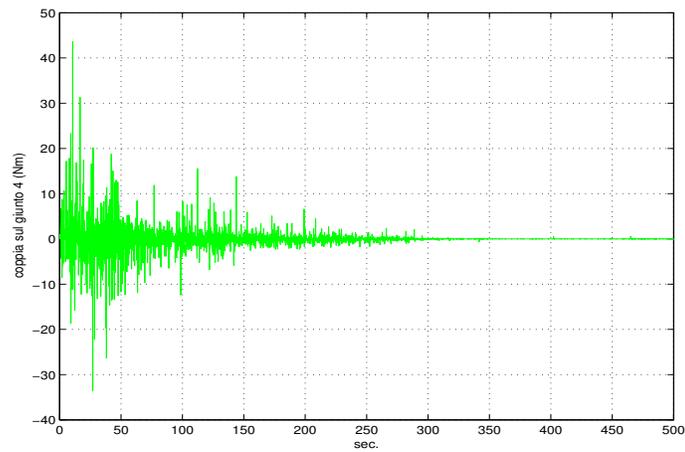


Figura 5.43: coppia erogata sul quarto giunto

Sulle ruote si applicano invece le seguenti coppie:

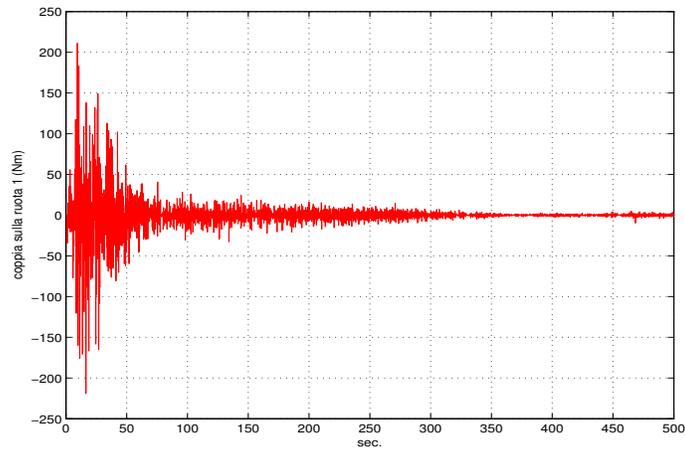


Figura 5.44: coppia erogata sulla prima ruota

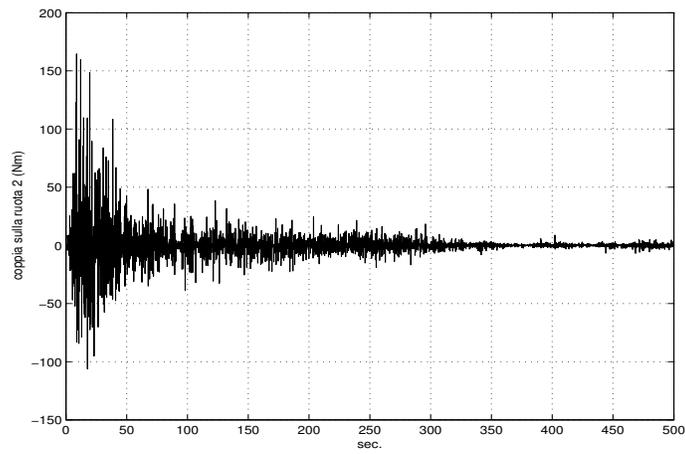


Figura 5.45: coppia erogata sulla seconda ruota

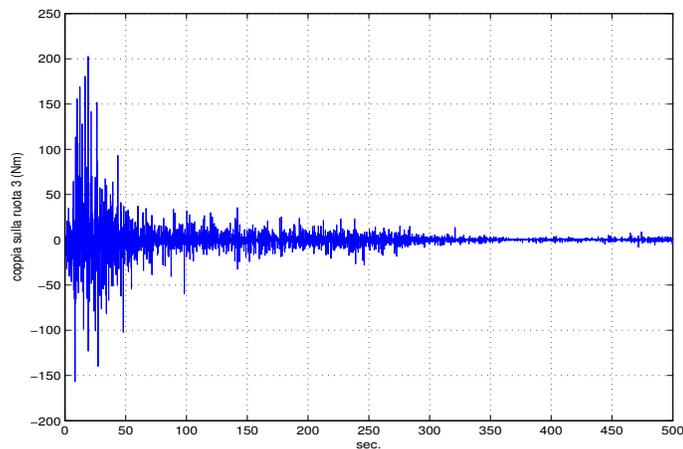


Figura 5.46: coppia erogata sulla terza ruota

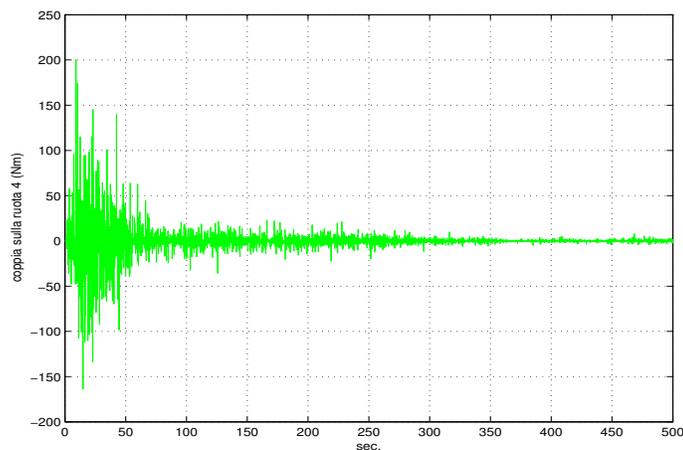


Figura 5.47: coppia erogata sulla quarta ruota

I valori di coppia erogati sugli assi dei giunti e su quelli delle ruote, e di conseguenza i parametri del moto dei *V.S.C.M.G.*, risultano fisicamente inaccettabili. Coppie maggiori di $200Nm$ sono accettabili per un propulsore automobilistico, ma non per un sistema di controllo che peraltro agisce su assi con inerzia molto modesta!!! Il risultato sarebbe la distruzione istantanea dei dispositivi (ammettendo la possibilità di erogare tali valori di coppia). Oltre ai valori massimi raggiunti dai parametri, non meno preoccupanti sono i tassi con cui essi variano. Riportiamo a titolo di esempio un ingrandimento sul grafico della coppia sulla prima ruota:

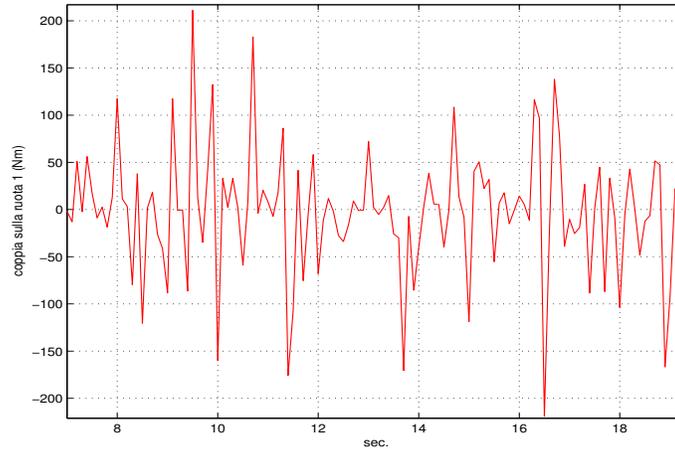


Figura 5.48: ingrandimento coppia erogata sulla prima ruota (tra 7 e 19 sec.)

In frazioni di secondo il motore dovrebbe passare da circa $200Nm$ in un verso ad un valore dello stesso ordine di grandezza nell'altro!

Tra le numerose simulazioni effettuate per i due metodi di controllo, si sono sempre riscontrati risultati di questo tipo per il *feedback Torque Based*. Solo casi molto particolari hanno dato dei risultati accettabili, restando comunque delle manovre marginali e sostanzialmente solo degli esempi senza alcuna generalità. Inoltre, nell'ambito di queste manovre, basta variare di poco i parametri, che il comportamento diviene muovamente esplosivo. Riportiamo un'esempio in cui si riscontrano andamenti più moderati. I dati sono riportati nelle seguenti tabelle:

Simbolo	Valore scelto	Unità di misura
θ	54.75	deg.
\mathbf{J}	$\begin{bmatrix} 15053 & 0 & 0 \\ 0 & 6510 & 0 \\ 0 & 0 & 11122 \end{bmatrix}$	$kg\ m^2$
\mathbf{Y}_j	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$	$kg\ m^2$
$I_{S_j}^w$	0.7	$kg\ m^2$
Y_{g_j}	0.5	$kg\ m^2$

Tabella 5.3: Valori scelti per la distribuzione delle masse di un sistema *V.S.C.M.G.*.

Simbolo	Valore scelto	Unità di misura
$\Omega(0)$	$[700, 700, 700, 700]^T$	$\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$
$\gamma(0)$	$[0, 0, 0, 0]^T$	rad.
$\dot{\gamma}(0)$	$[0, 0, 0, 0]^T$	$\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$
$\omega_b(0)$	$[0, 0, 0]^T$	$\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$
$[\vec{\epsilon}(0), \eta(0)]$	$[0, 0, 0, 1]^T$	-
g_b	$[0, 0, 0]^T$	Nm
k_0	3000	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{sec.}^2}$
K	$\begin{bmatrix} 3000 & 0 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 \\ 0 & 0 & 3000 \end{bmatrix}$	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{sec.}}$

Tabella 5.4: Parametri scelti per la simulazione.

Lo scopo della manovra è semplicemente portare la prima componente di velocità angolare della piattaforma al valore di $0.01 \frac{\text{rad}}{\text{sec.}}$. La piattaforma non ha errore d'assetto. Dopo circa 170sec. di simulazione il risultato è il seguente:

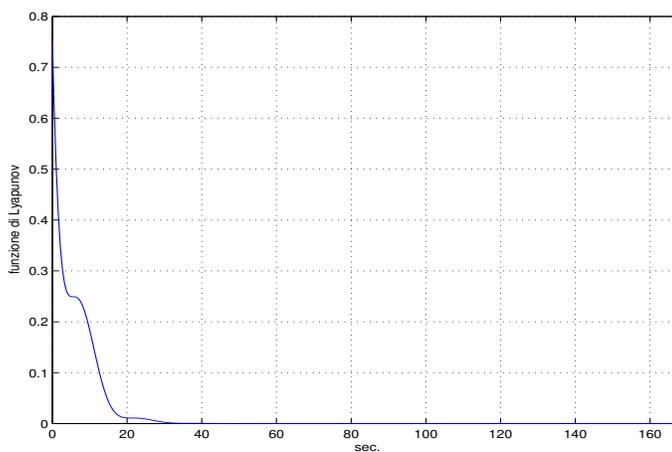


Figura 5.49: funzione di *Lyapunov*

La velocità angolare e l'errore sull'assetto risultano:

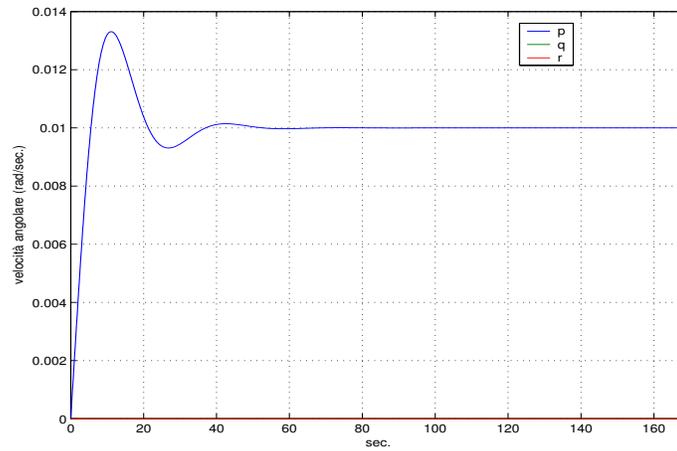


Figura 5.50: andamento velocità angolare

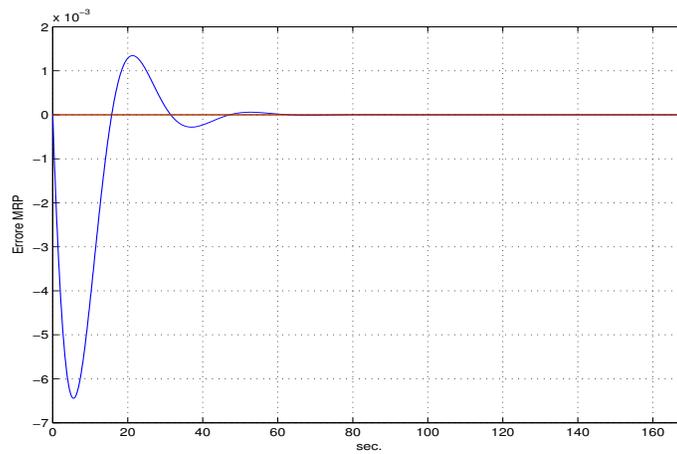


Figura 5.51: andamento errore sull'assetto

In questo caso i giunti e le ruote hanno un andamento accettabile:

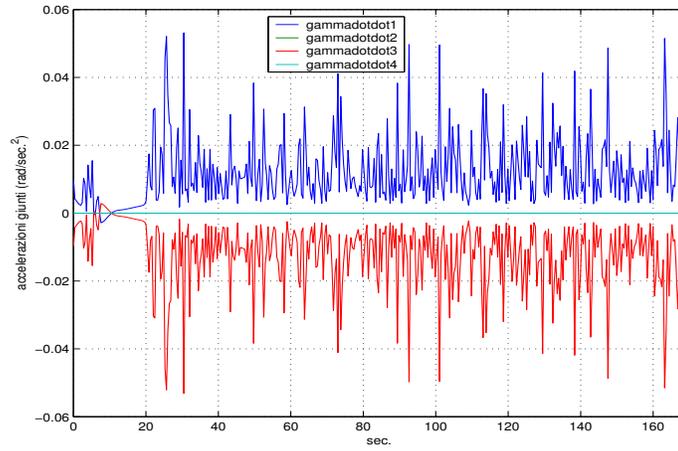


Figura 5.52: andamento accelerazioni giunti

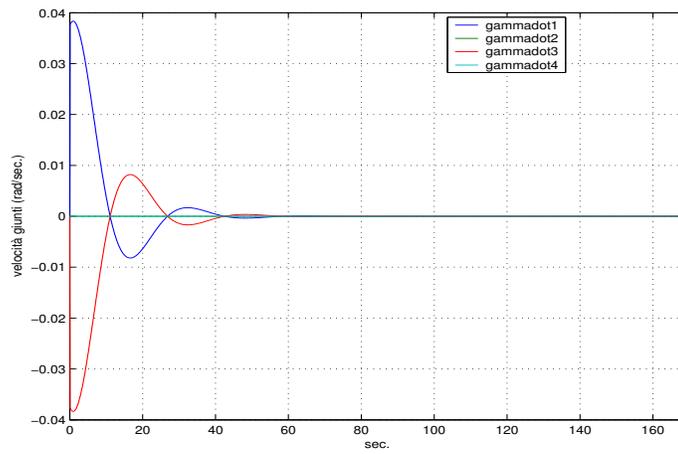


Figura 5.53: andamento velocità giunti

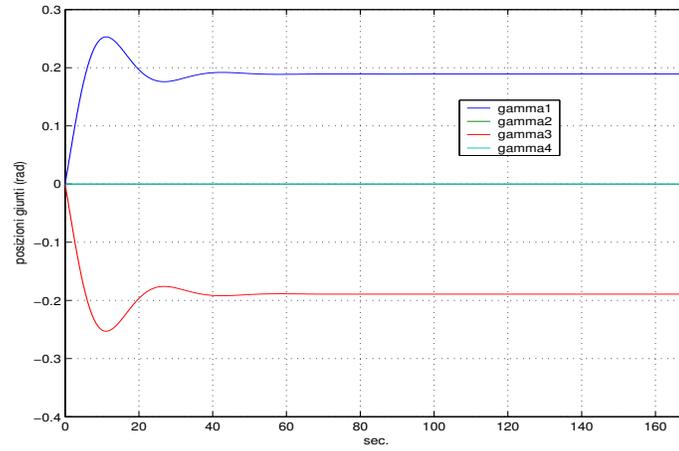


Figura 5.54: andamento posizioni giunti

Per le ruote si ha:

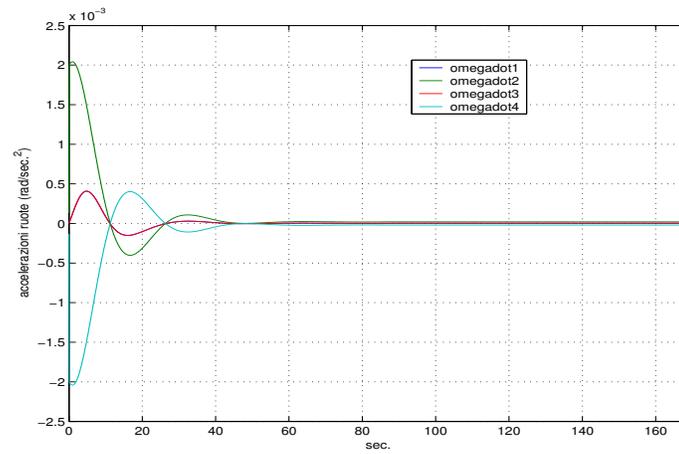


Figura 5.55: andamento accelerazioni ruote

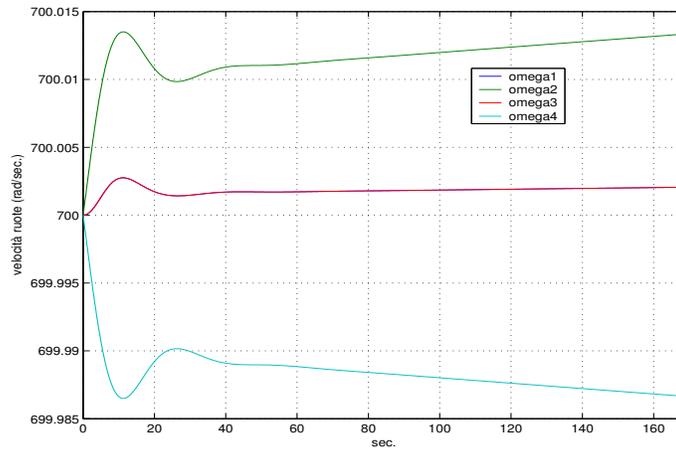


Figura 5.56: andamento velocità ruote

Le coppie relative a tali comportamenti risultano infine:

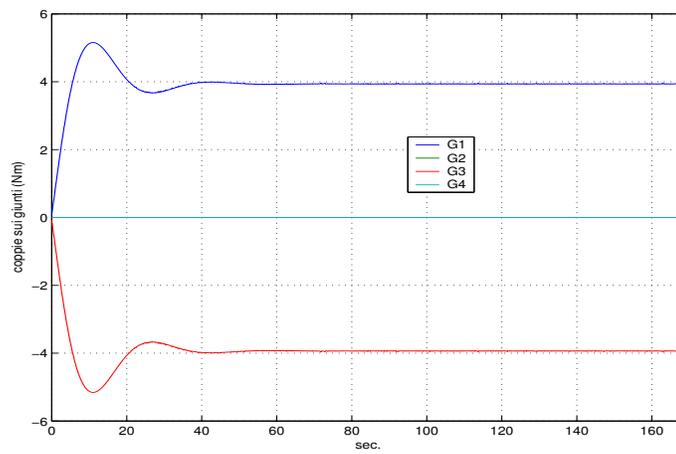


Figura 5.57: coppie sui giunti

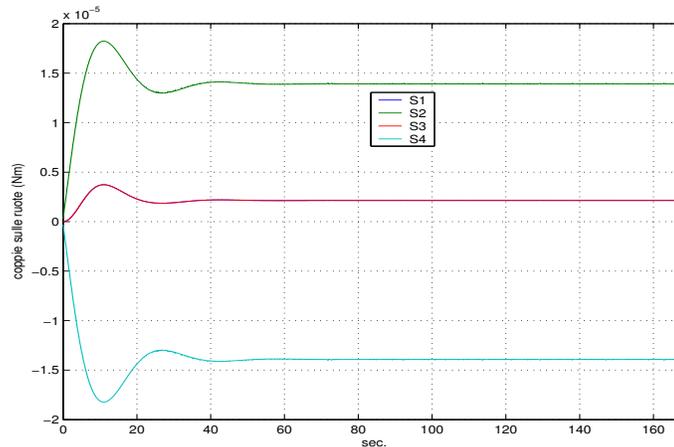


Figura 5.58: coppie sulle ruote

Notiamo dunque come, in questo particolarissimo caso, il controllo si comporti in maniera accettabile. Nonostante ciò possiamo notare come nelle figure 5.57 e 5.58 le coppie si stabilizzano a valori diversi da zero, anche quando l'errore sullo stato satellitare si è già annullato. Il grafico 5.54 mostra come i giunti si fermino in posizioni costanti mentre due ruote continuano ad accelerare (figura 5.56). Con una rapida occhiata alle relazioni 3.25 e 3.20 ci si convince agevolmente di come sia possibile che i giunti restino fissi anche con una coppia applicata su di essi. L'effetto giroscopico dovuto alle ruote permette ai giunti di restare pressochè fissi. Inoltre la figura 5.53 riporta delle accelerazioni diverse da zero. Queste sono però abbastanza modeste e rapidamente variabili, per cui il risultato sulla posizione dei giunti è praticamente nullo. In sostanza possiamo immaginare che i giunti siano sollecitati ad una frequenza per cui restano fissi sullo stesso valore. Un'ingrandimento sulle variabili farebbe notare queste piccolissime oscillazioni. Al di là del fatto che comunque questo comportamento non è ottimale per un sistema di controllo, resta da osservare come il sistema continui a sforzare su ruote e giunti nonostante il risultato sia già stato ottenuto: sarebbe come tenere fermo un oggetto tirandolo con due forze uguali e contrarie, anche sapendo che resterebbe in quiete lo stesso! Si è in questa sede riportata quest'unica manovra anche se altre molto simili possono dare dei risultati dello stesso tipo. Si tratta però sempre di casi marginali e non ci soffermiamo oltre su questa casistica tutt'altro che generale.

In conclusione possiamo affermare che il metodo *Velocity Based* risulta l'unico fisicamente utilizzabile dei due, cosa che verrà confermata anche dalle applicazioni successive. Il pregio di questa metodologia risiede nel diretto controllo delle velocità dei giunti, per cui si può impostare una filosofia di guida come quella che in questa sede si è descritta (par. 3.1.1). Il punto debole del controllo invece è dovuto al fatto che si trascura un termine nella relazione 2.14. Non potendo derivare un segnale in una simulazione numerica, si è costretti ad utilizzare un modello semplificato e stabilire a posteriori, con una stima di massima, se la simulazione è attendibile o meno. In altri termini se nella realtà il controllore andrebbe a trascurare un termine importante (almeno in fasi della manovra) per cui il tutto si andrebbe a ripercuotere su un inaccurato inseguimento d'assetto.

Il metodo *Torque Based*, nella versione qui proposta, risulta invece del tutto generale, non dovendo trascurare nessun termine, nè nel sistema di controllo, nè nella dinamica del processo. Ineccepibile teoricamente e nei risultati, robusto rispetto a qualsiasi manovra richiesta, è però un metodo che genera delle variabili di controllo ingegneristicamente impossibili! La complessità del sistema che si sta studiando non ci permette di affermare altro se non che, controllando con le coppie, si perde la possibilità di gestione delle grandezze cinematiche dei *V.S.C.M.G.*. In altre parole il sistema genera il vettore di controllo x trattando le G_j e le S_j alla stessa stregua. Nel *Velocity Based* si era invece appositamente disposta una legge per governare al meglio giunti e ruote. Passando alle coppie si perde la possibilità di visualizzare l'andamento di queste grandezze, e in particolare di gestirle in un determinato modo. Il tutto si ripercuote nel comportamento inaccettabile appena illustrato.

La modifica della funzione da minimizzare 3.31 potrebbe in qualche modo migliorare il comportamento del sistema. Teniamo a mente che il *Velocity Based* in fondo può vedersi come una delle infinite soluzioni del problema *Torque Based*. La differenza è che gestendo direttamente le velocità si opera un *bypass* delle coppie necessarie.

Tra gli sviluppi futuri, inerenti al vastissimo problema dei *V.S.C.M.G.*, annoveriamo quindi la ricerca di una metodologia migliore per poter controllare tramite le coppie o comunque per cercare di evitare la semplificazione del termine di accelerazione dei giunti cardanici. Tutto ciò nell'ottica di costruire un sistema di controllo con la maggior generalità e affidabilità possibili. Il *Torque Based* qui proposto può essere preso a spunto per sviluppi futuri.

5.3 Manovre e analisi dei parametri

Fin qui si sono riportati esempi volti a confermare i vantaggi nell'utilizzo di sistemi *V.S.C.M.G.* rispetto ai più vecchi attuatori della categoria delle classiche *fly wheels*. Si sono poi messi a confronto i due metodi di *feedback*. In questa sezione riportiamo principalmente due tipi di manovre (*slew* e *precession*), effettuate con il *Velocity Based*, evidenziando la dipendenza delle stesse dai parametri di controllo. Ne nascerà quindi un'analisi di tipo parametrico, la quale ha l'obiettivo di comprendere su quali grandezze si può lavorare in sede di progettazione dei controllori. Prenderemo dunque in esame anche il parametro α definito in 3.6 con la posizione che sia minore di $\frac{1}{10}$.

5.3.1 Slew

E' una manovra relativamente semplice: il satellite in volo al di sopra della superficie terrestre deve effettuare una rotazione di data ampiezza prima in un verso, poi nell'altro. Alla fine della manovra il corpo rigido si trova dunque nella posizione iniziale. Tale rotazione dovrà avvenire attorno ad un ben determinato asse: l'applicazione di tale manovra infatti può essere il monitoraggio (con telecamere o altri dispositivi di telerilevamento) di una porzione di superficie terrestre. Ovvi i risvolti militari e non. Senza perdita di generalità riporteremo una rotazione attorno ad uno degli assi principali di inerzia. Ovviamente può esistere un errore sull'assetto di volo, che va contemporaneamente corretto per poi effettuare la scansione del territorio. In

termini di ω_d si richiede che due componenti restino nulle, mentre la terza sia un periodo di seno. In questa sede si è scelto un seno di periodo 30sec.. L'ampiezza fisserà l'angolo di rotazione. Per ottenere il segnale di velocità angolare desiderata si sono utilizzati un generatore di onde di seno unito ad un generatore di segnale a gradino, secondo lo schema di seguito illustrato:

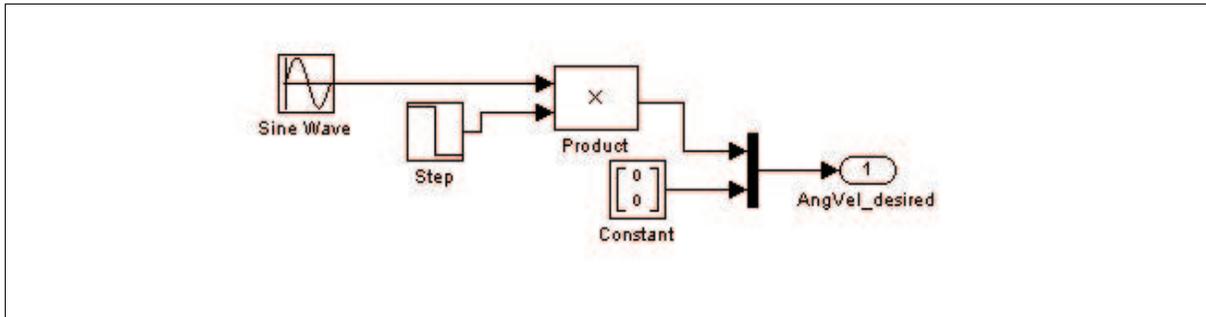


Figura 5.59: segnale di velocità angolare desiderata per il caso *slew*

L'ampiezza scelta per l'onda si seno è di $0.2 \frac{rad}{sec.}$ a cui, per integrazione, corrisponde un angolo di rotazione, all'atto di inversione del moto, pari a circa 103.13° . La simulazione è della durata di 100sec. con un integratore a passo fisso con campionamento di 0.1sec..

I parametri iniziali per la simulazione restano sostanzialmente gli stessi utilizzati finora:

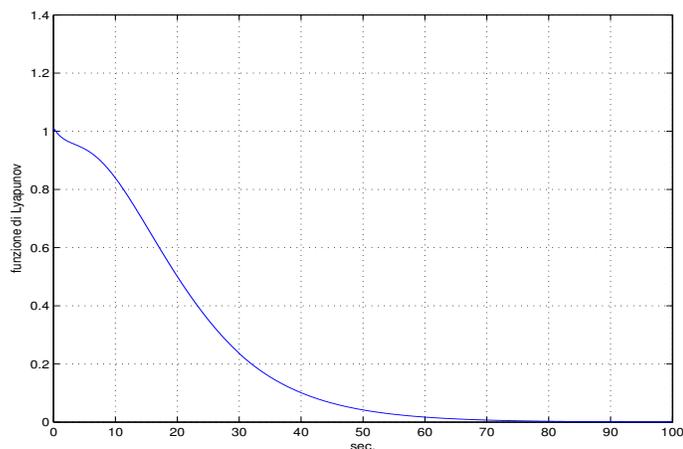
Simbolo	Valore scelto	Unità di misura									
θ	54.75	deg.									
J	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>86.215</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>85.07</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>113.565</td> </tr> </table>	86.215	0	0	0	85.07	0	0	0	113.565	kg m ²
86.215	0	0									
0	85.07	0									
0	0	113.565									
Y_j	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>0.13</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0.04</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0.03</td> </tr> </table>	0.13	0	0	0	0.04	0	0	0	0.03	kg m ²
0.13	0	0									
0	0.04	0									
0	0	0.03									
$I_{s_j}^v$	0.1	kg m ²									
Y_{g_j}	0.03	kg m ²									

Tabella 5.5: Valori scelti per la distribuzione delle masse di un sistema V.S.C.M.G..

Simbolo	Valore scelto	Unità di misura
$\Omega(0)$	$[14, 14, 14, 14]^T$	$\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$
$\gamma(0)$	$[0, 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]^T$	rad.
$\dot{\gamma}(0)$	$[0, 0, 0, 0]^T$	$\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$
$\omega_b(0)$	$[0.01, 0.05, -0.01]^T$	$\frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$
$[\vec{\varepsilon}(0), \eta(0)]$	$[0.6362, 0.4610, 0.3074, 0.5368]^T$	-
g_b	$[0, 0, 0]^T$	Nm
μ	10^{-9}	-
k_0	1.7	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{sec.}^2}$
\mathbf{K}	$\begin{bmatrix} 13.13 & 0 & 0 \\ 0 & 13.04 & 0 \\ 0 & 0 & 15.08 \end{bmatrix}$	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{sec.}}$
W_{s0}	2	-
W_g	1	-

Tabella 5.6: Parametri scelti per la simulazione.

Dunque il satellite deve portarsi da una posizione iniziale errata a quella desiderata, e operare la manovra attorno all'asse prescelto. Inoltre deve correggere delle piccole componenti di velocità angolare diverse da zero all'istante iniziale. Come già sottolineato i guadagni \mathbf{K} e k_0 influenzano in modo diretto l'andamento che ci si può attendere per lo stato satellitare. Con i valori appena illustrati si ha:

Figura 5.60: andamento funzione di *Lyapunov*

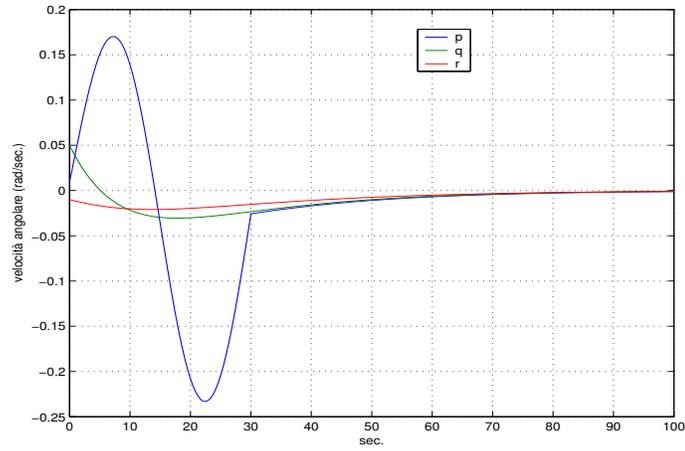


Figura 5.61: andamento velocità angolare

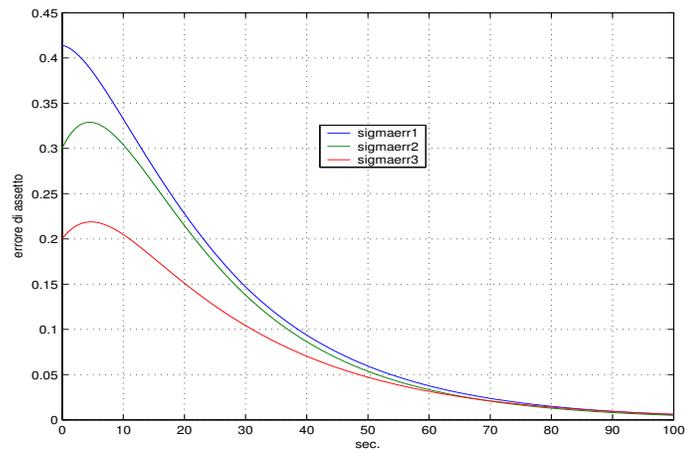


Figura 5.62: andamento errore d'assetto

Le variabili di controllo hanno il seguente andamento:

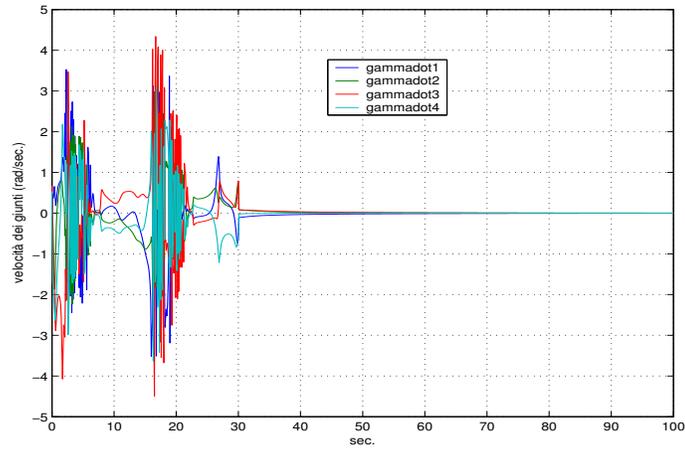


Figura 5.63: velocità dei giunti

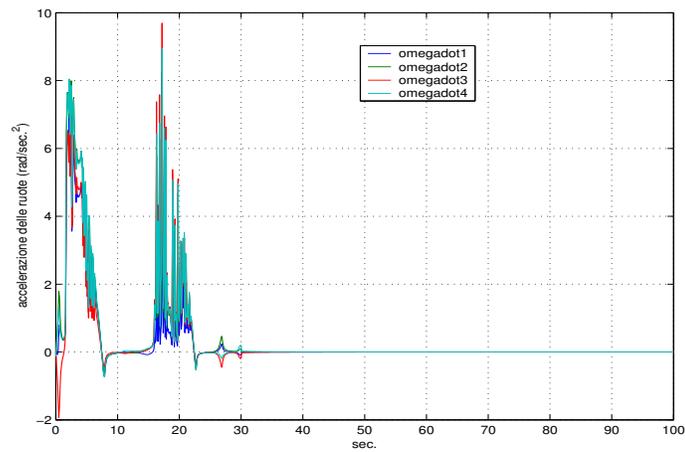


Figura 5.64: accelerazione delle ruote

Come si può immaginare osservando i precedenti grafici, i giunti non hanno un comportamento compatibile con la posizione di limitatezza del rapporto α . L'andamento è difatti il seguente:

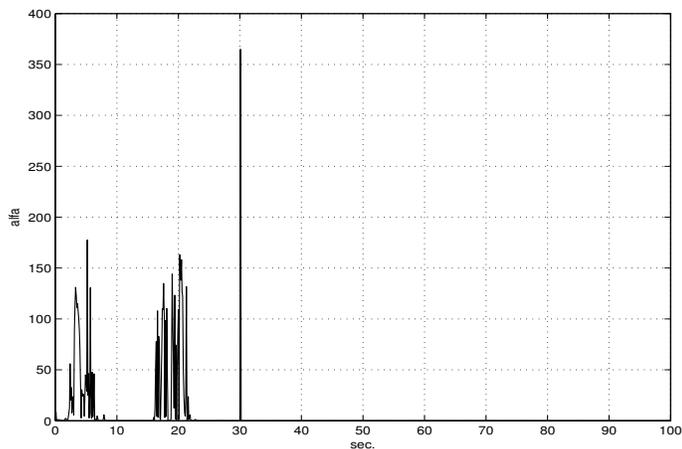


Figura 5.65: parametro alfa

A conferma del fatto che i picchi del parametro α sono indicatori di configurazioni singolari, che il sistema non è riuscito a fronteggiare nella giusta misura, riportiamo anche l'andamento di δ :

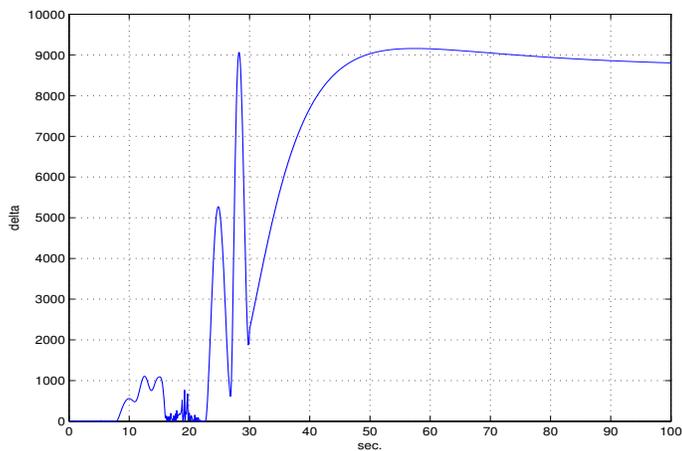


Figura 5.66: parametro delta

Ingrandendo nell'intorno dei primi 40sec. notiamo la concomitanza tra l'annullamento di δ e i picchi di α .

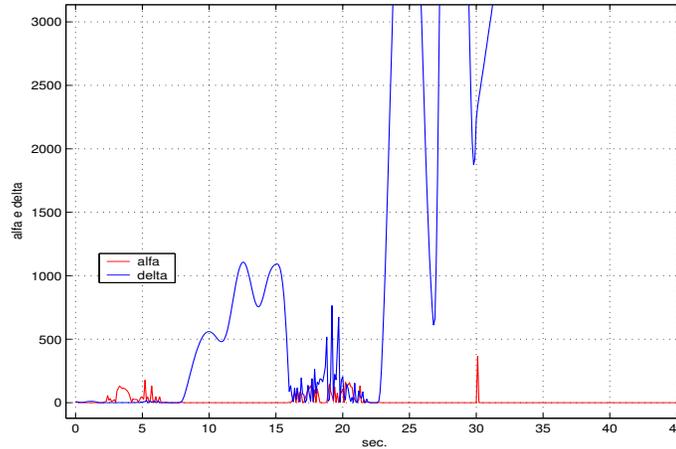
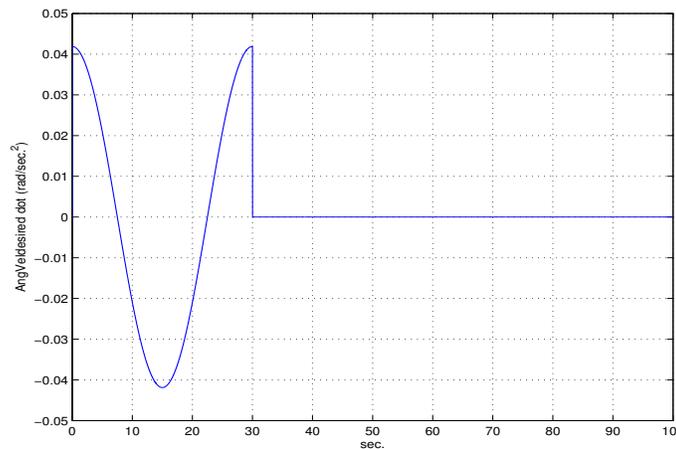


Figura 5.67: ingrandimento primi 40 sec.

Esattamente a 30sec. c'è invece un ulteriore picco di α a cui non corrisponde una configurazione singolare. Il motivo è dovuto all'andamento dei segnali di velocità angolare desiderata. In particolare la $\dot{\omega}_d$ è discontinua nel punto $t = 30\text{sec.}$, basti infatti derivare la componente sinusoidale di ω_d e si ottiene:

Figura 5.68: discontinuità nella $\dot{\omega}_d$

Notiamo come le velocità iniziali di rotazione delle ruote sono state scelte estremamente modeste. Come già ipotizzato in precedenza, una via per ridurre il peso delle singolarità è senz'altro installare delle ruote che lavorino nell'intorno di velocità di *spin* elevate. Mantenendo tutti i parametri invariati riportiamo gli andamenti delle $\dot{\gamma}$, Ω , δ e α , aumentando progressivamente la condizione iniziale Ω_0 . D'altronde, con riferimento all'articolo [4] possiamo pensare di portare le ruote fino a 60000RPM e cioè fino a $6283 \frac{\text{rad}}{\text{sec.}}$, anche nell'ottica di una futura integrazione *I.P.A.C.S.* Non sarà riportato l'andamento dello stato in quanto resta invariato non avendo modificato \mathbf{K} e k_0 .

- $\Omega_0 = [200, 200, 200, 200]^T \frac{rad}{sec}$:

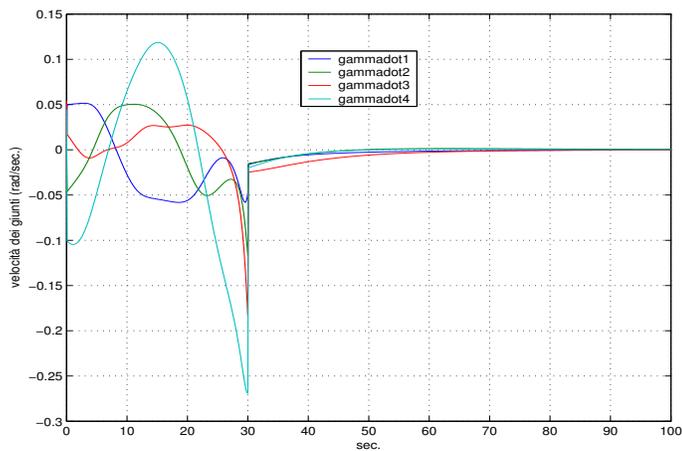


Figura 5.69: velocità dei giunti

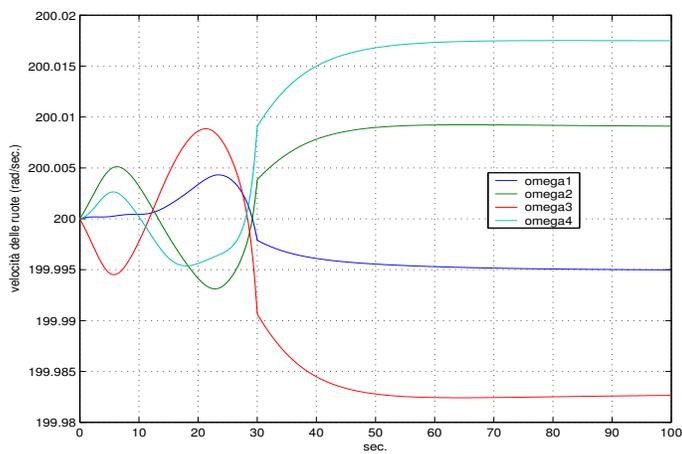


Figura 5.70: velocità delle ruote

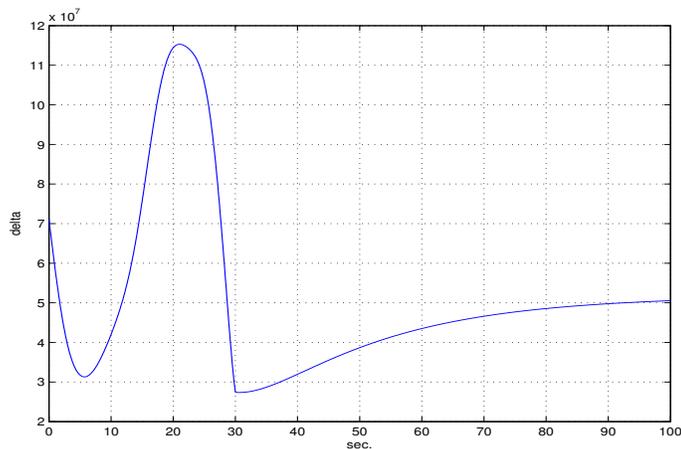


Figura 5.71: parametro delta

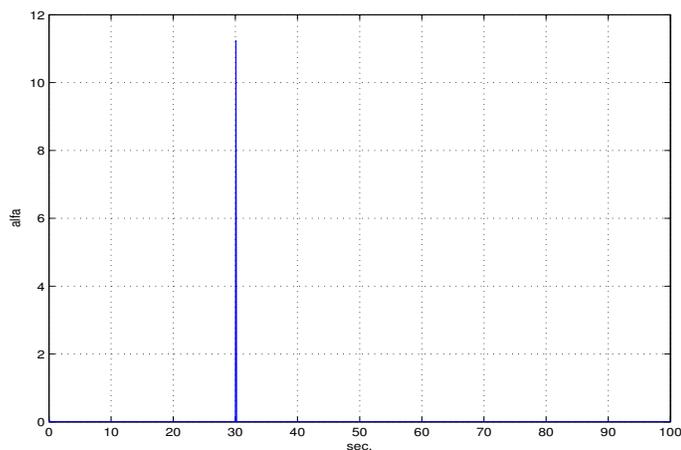


Figura 5.72: parametro alfa

Ora α non presenta valori eccessivi, tranne che nel punto di discontinuità a 30sec., il quale resterà comunque una sorgente di picco per l'andamento delle $\dot{\gamma}$. Gli stati singolari sono spariti: la matrice \mathbf{C} definita in 2.16 risulta infatti dipendente anche dalle velocità delle ruote. In prossimità di stati singolari, se gli *spin* sono bassi il determinante δ v'è pressochè a zero, se invece le Ω sono alte si riesce a continuare a controllare senza sforzare eccessivamente il tasso di variazione di $\dot{\gamma}$. Non essendo α ancora accettabile andiamo avanti con l'innalzamento degli *spin*.

- $\Omega_0 = [500, 500, 500, 500]^T \frac{rad}{sec.}$:

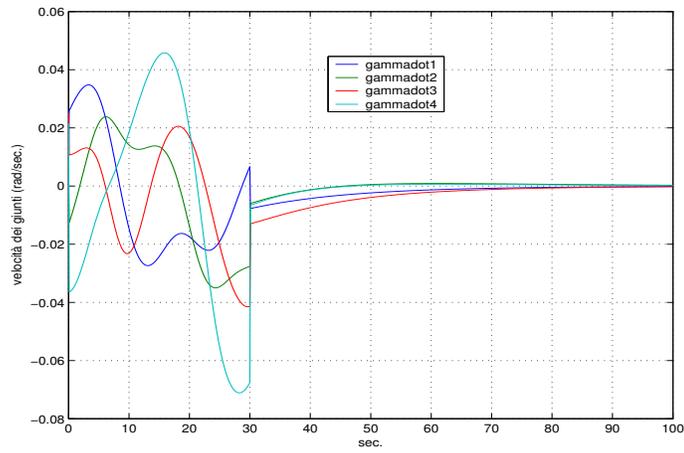


Figura 5.73: velocità dei giunti

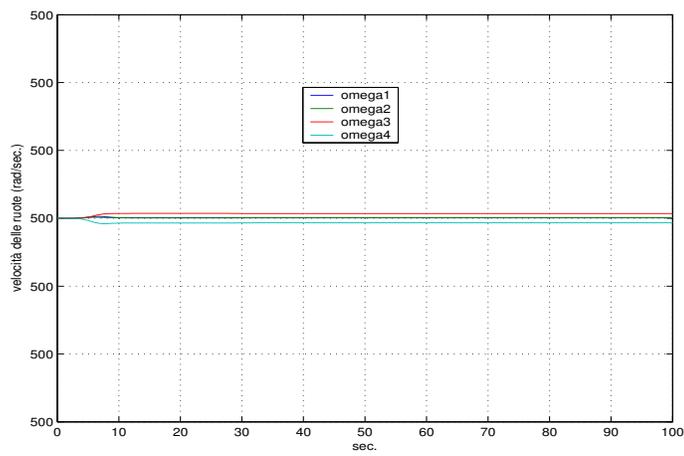


Figura 5.74: velocità delle ruote

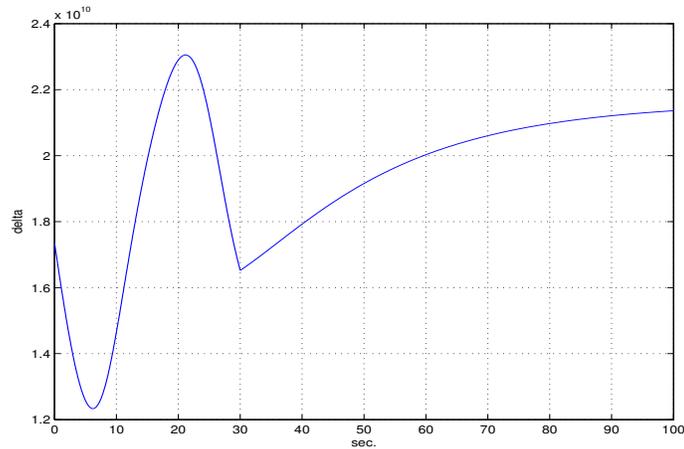


Figura 5.75: parametro delta

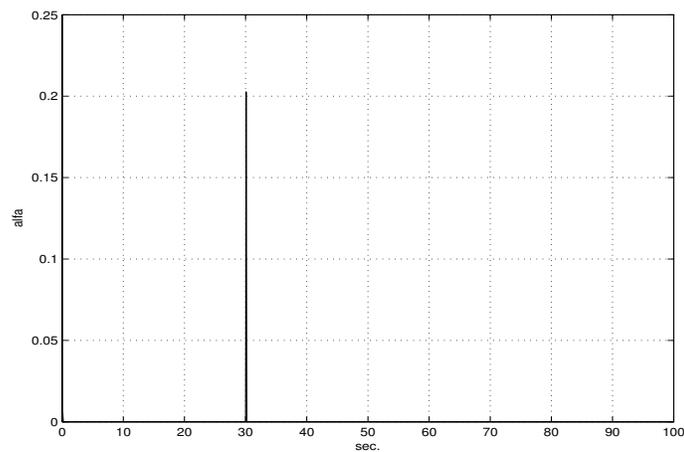


Figura 5.76: parametro alfa

Notiamo come α si vada riducendo progressivamente: siamo al limite dell'accettabilità della simulazione. δ ormai non cambia più andamento, cresce solo in ampiezza. I giunti devono ancora sopportare la discontinuità ma di entità sempre minore, per contro le ruote sono accelerate sempre meno scemando la necessità di sopperire a fasi con mancanza di amplificazione della coppia.

- $\Omega_0 = [700, 700, 700, 700]^T \frac{rad}{sec.}$:

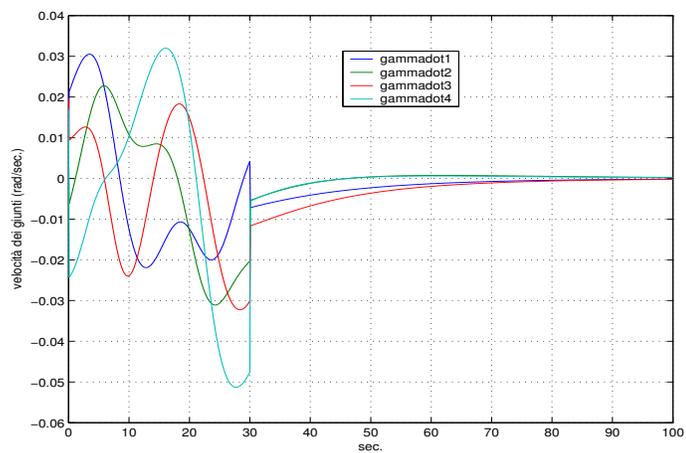


Figura 5.77: velocità dei giunti

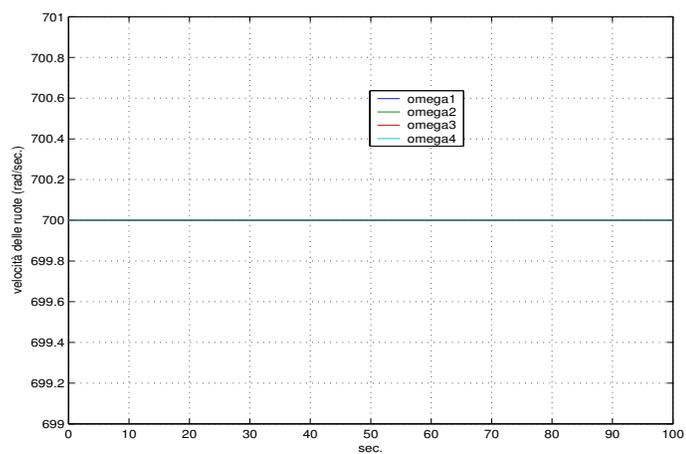


Figura 5.78: velocità delle ruote

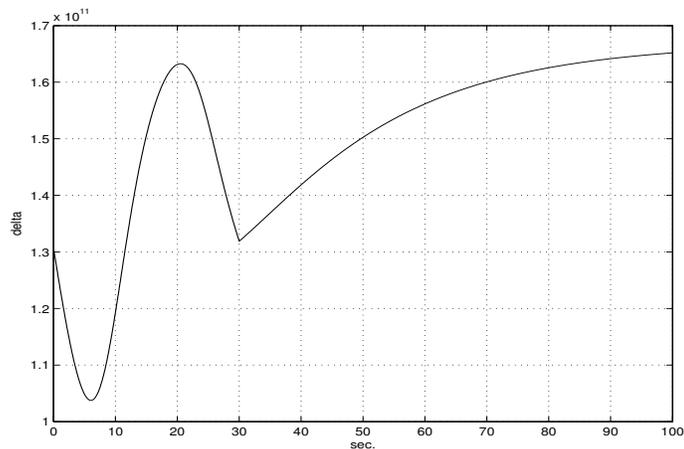


Figura 5.79: parametro delta

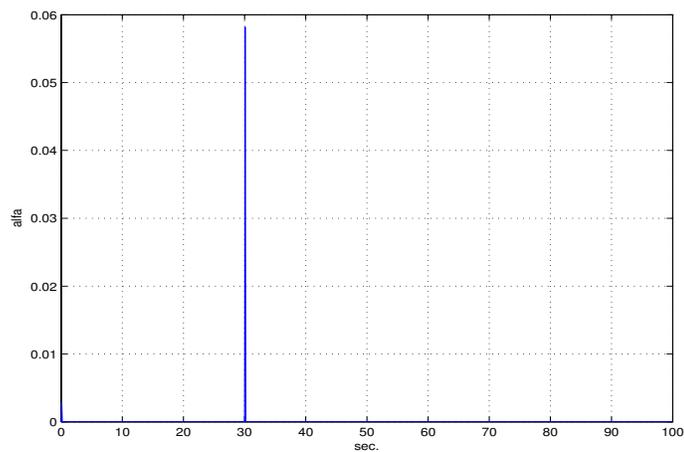


Figura 5.80: parametro alfa

Con l'ultima simulazione si riesce a soddisfare la condizione imposta al parametro α . Riportiamo dunque gli sforzi necessari in termini di coppia. Logicamente sulle ruote ci sarà una modestissima azione (si veda la figura 5.78) mentre lo sforzo maggiore sarà sui giunti per ottenere l'*amplification torque*:

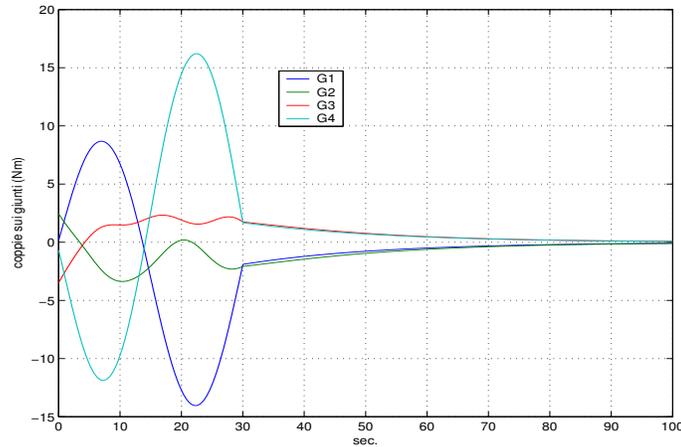


Figura 5.81: coppie sui giunti

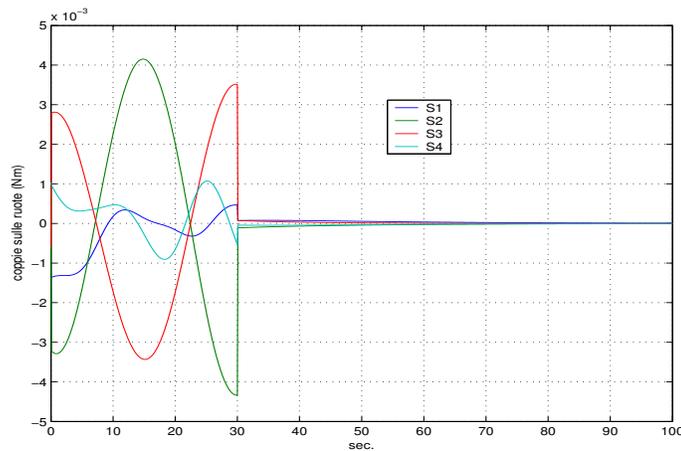


Figura 5.82: coppie sulle ruote

A questo punto dell'analisi esaminiamo l'effetto dei parametri \mathbf{K} e k_0 sul comportamento del sistema, avendoli finora scelti come valori di primo tentativo. Uno sguardo attento alle figure 5.61 e 5.62 ci fa notare come la velocità angolare segua il comando in 30sec. mentre l'assetto richieda molto più tempo per convergere al valore desiderato. In questa condizione si otterrebbe lo *slew* attorno ad una posizione che non è quella voluta, mentre l'assetto sarebbe corretto solo più tardi. Risulta palese dunque l'incompatibilità dei tempi con cui le due parti dello stato satellitare convergono al valore desiderato. Il perchè di questo tipo di influenza possiamo spiegarlo osservando la relazione 2.11, che qui riportiamo per comodità:

$$-\mathbf{K}\omega_e = \mathbf{J}^T \dot{\omega}_e + \frac{1}{2} \sum (Y_{s_j} - Y_{t_j}) \dot{Y}_j (t_j s_j^T + s_j t_j^T) \omega_e + k_0 \sigma_e$$

Con una stima di massima, tenendo a mente solo i due termini che contengono i parametri di controllo, possiamo dire che, se k_0 è troppo basso rispetto a \mathbf{K} , ne risulta che, per mantenere

l'uguaglianza, l'errore sulla velocità può essere basso mentre quello sull'assetto rimane di entità maggiore istante per istante; dunque converge a zero più lentamente. Il caso opposto invece (k_0 elevato rispetto a \mathbf{K}) darebbe più peso all'assetto che tenderebbe a convergere repentinamente. In realtà questa seconda eventualità ha degli effetti più complicati, illustrati a seguire. Un ulteriore strada per spiegare questa dipendenza è quella di ricordare l'espressione della coppia richiesta L_{rm} :

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\omega}_e + k_0\boldsymbol{\sigma}_e - \mathbf{J}_T\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \boldsymbol{\omega}^x(\mathbf{J}_T\boldsymbol{\omega} + \sum I_{s_j}^w s_j \boldsymbol{\Omega}_j) + \mathbf{g}_b = L_{rm}$$

Il vettore dei controlli dunque pesa i due errori in termini di \mathbf{K} e k_0 , e agisce di conseguenza su di essi. Per comprendere meglio questa casistica riportiamo un semplice esempio. Astraendo dal problema dell'assetto, si supponga di dover inseguire un moto rettilineo uniforme, avendo un errore iniziale sia in velocità che in posizione. Possono verificarsi due casi estremi:

- Si dà più peso alla correzione di velocità per cui si raggiunge il valore desiderato senza curarsi inizialmente della posizione. Sarà dunque necessario cercare di accelerare di nuovo per raggiungere la giusta posizione. Non volendo però riportare un errore sulla velocità è facile immaginare come ciò risulti impossibile! O meglio, si cercherà di accelerare il meno possibile, al limite dell'accelerazione nulla, per cui la correzione posizionale richiederà tempi molto lunghi.
- Si accelera bruscamente allo scopo di correggere da subito la posizione, senza curarsi ora della velocità. Si arriverà alla giusta posizione con velocità errata, per cui ci sarà una nuova fase di accelerazione con conseguente errore posizionale. Ancora, uno sforzo eccessivo per correggere la posizione e così via. Con una serie finita di situazioni di accelerazione e decelerazione si converge al moto desiderato, ma avendo sovrastimato lo sforzo e in un tempo sicuramente non ottimale.

Gli esempi riportati sono una grossa semplificazione del problema dell'assetto, dove si cerca di inseguire una legge variabile. In questo caso, se lo stato non converge in tempi compatibili col comando ne risulta una manovra esatta numericamente ma errata in pratica. Si pensi alla manovra appena riportata in cui lo *slew* avverrebbe troppo presto e quindi attorno a posizioni non ancora corrette. Comportamento opposto invece si riscontra scegliendo i seguenti parametri:

$$k_0 = 100 \quad e \quad \mathbf{K} = \text{diag}[10; 10; 10]$$

Un k_0 così elevato rispetto a \mathbf{K} annulla quell'effetto di smorzamento che permette allo stato di convergere nei tempi giusti ai valori imposti dal segnale di comando:

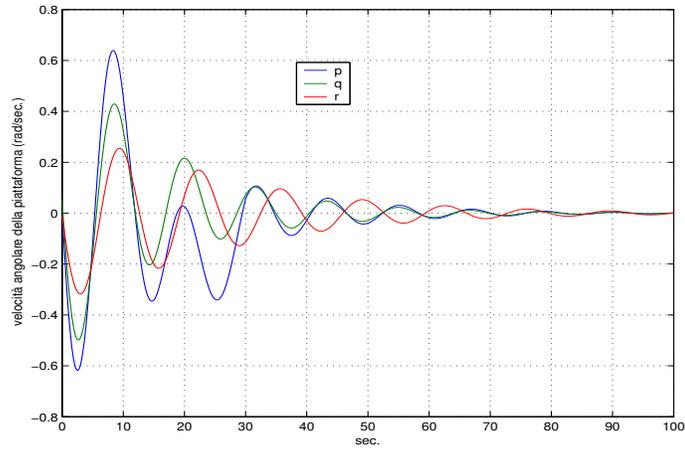


Figura 5.83: velocità angolare piattaforma

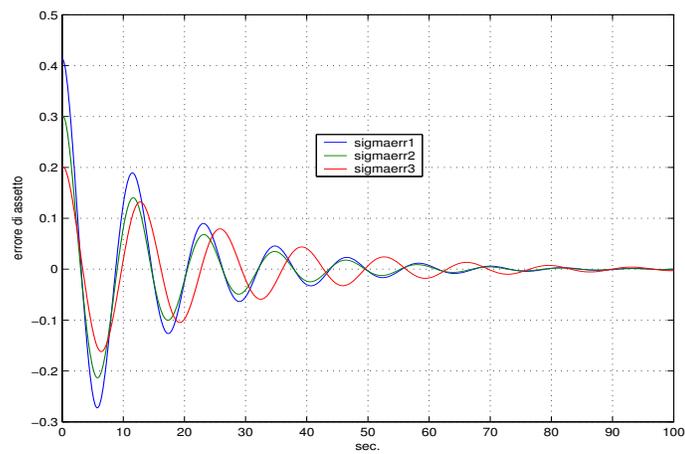


Figura 5.84: errore sull'assetto

A conferma del fatto che lo sforzo di controllo risulta eccessivo, si confronti la seguente figura con la 5.81:

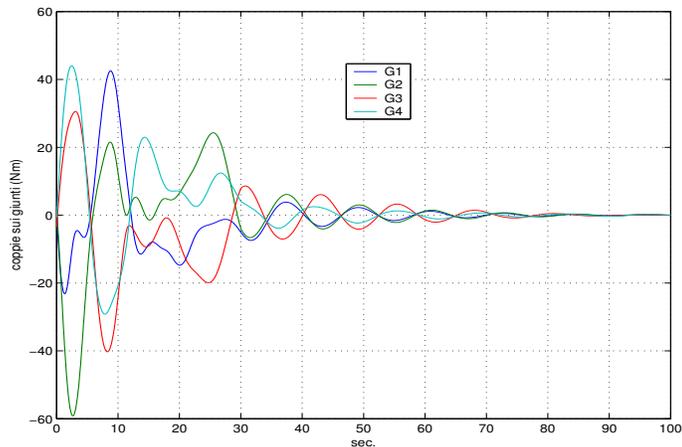


Figura 5.85: coppie sui giunti

Gli andamenti dello stato fanno capire subito che il risultato sarà ben diverso dalla manovra desiderata. Inoltre le coppie sui giunti risultano raddoppiate a parità degli altri parametri, come anticipato nei due esempi.

Un buon risultato, per la manovra di *slew*, si ottiene ponendo $k_0 = 100$ e $\mathbf{K} = \text{diag}[100; 100; 100]$. Gli andamenti delle variabili sono confortanti:

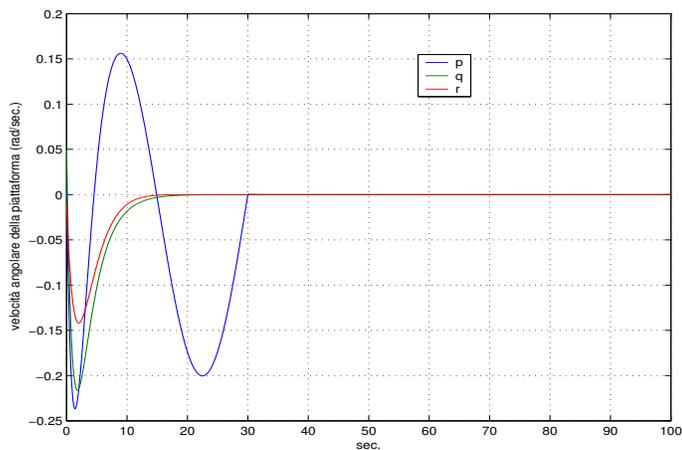


Figura 5.86: velocità angolare piattaforma

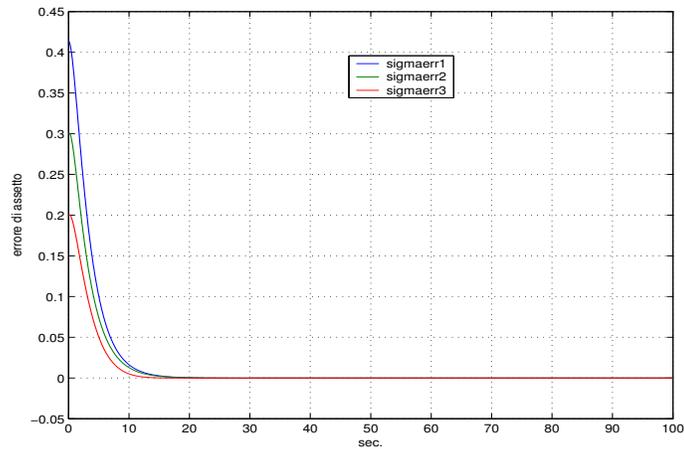


Figura 5.87: errore sull'assetto

Le coppie sui giunti tornano ai valori del caso 5.81:

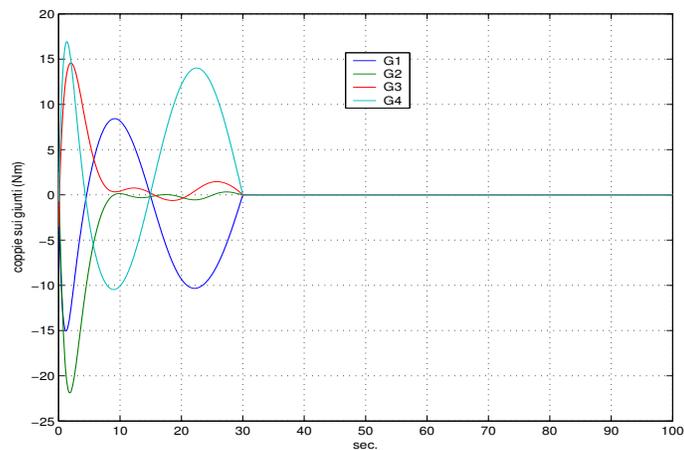
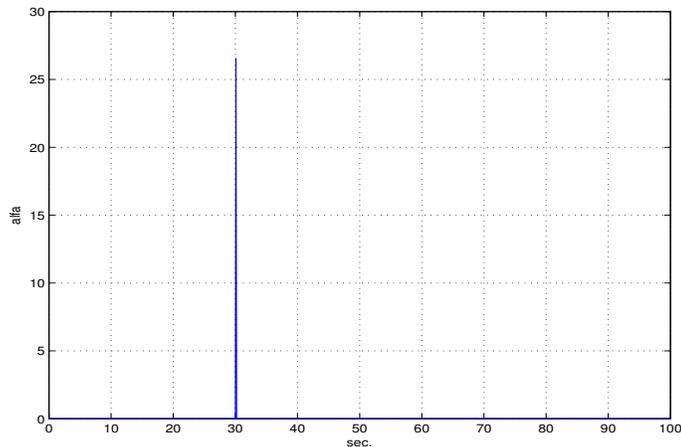
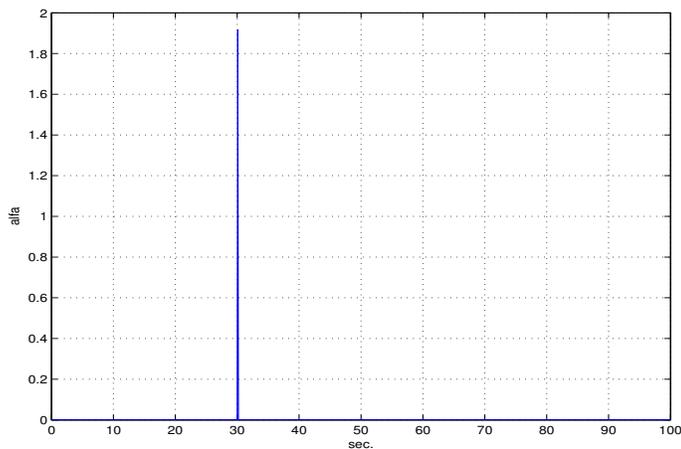


Figura 5.88: coppie sui giunti

Ciò che non ci permette di concludere questa sorta di ottimizzazione per la manovra di *slew* è l'andamento del parametro α . La correzione più repentina dell'assetto sposta lo sforzo di controllo nella fase iniziale (si confronti con la figura 5.81), e il parametro ritorna elevato:

Figura 5.89: parametro α

La discontinuità, come già osservato, è sempre presente nel segnale $\dot{\omega}_d$ e si ripercuote in una sorta di scossone alle variabili di controllo. Di nuovo possiamo pensare di installare delle ruote che abbiano uno *spin* operativo più elevato. Ponendo $\Omega_0 = [2000; 2000; 2000; 2000]^T \frac{rad}{sec.}$ si riesce a ridurre il picco, ma ancora si rimane al di sopra della tolleranza assegnata:

Figura 5.90: parametro α

Con valori così elevati è logico aspettarsi che i motori di gestione dei giunti sforzino maggiormente :

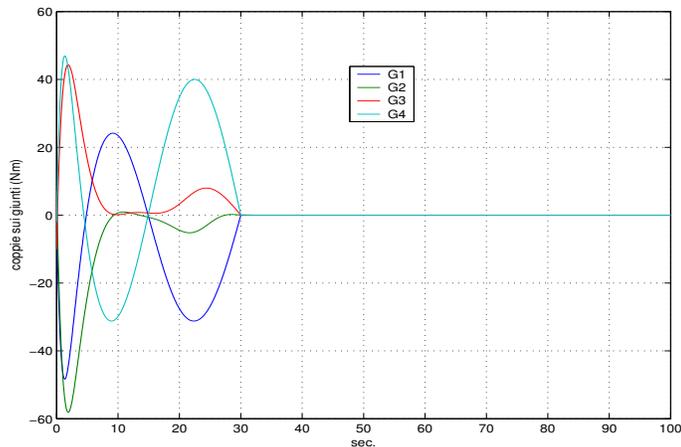


Figura 5.91: coppie sui giunti

A questo punto ci si chiede quanto possa avere senso cercare di abbassare quell'unico picco, facendo sforzare i motori dei giunti innalzando ancora di più lo *spin*. Rinunciando ad avere un segnale di comando così netto, si può generare una derivata di ω_d senza discontinuità, facendo in modo che la componente sinusoidale di velocità angolare sia in realtà prodotto tra un seno ed un esponenziale:

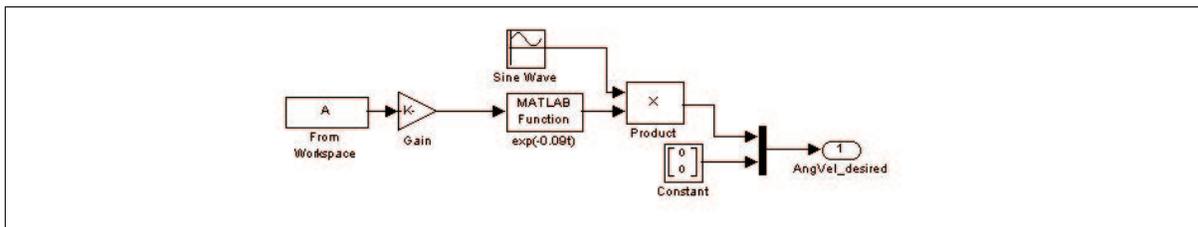
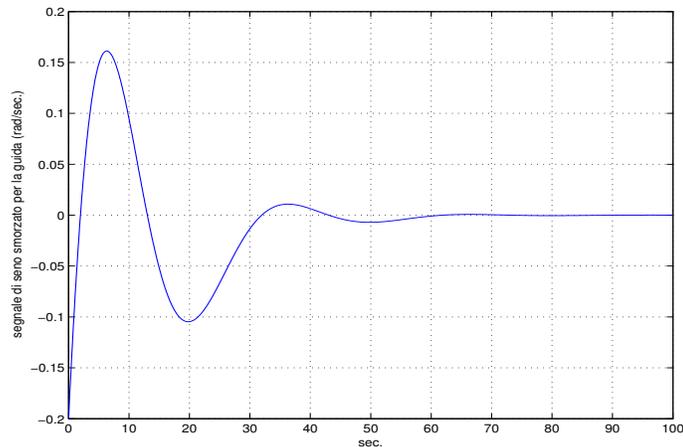
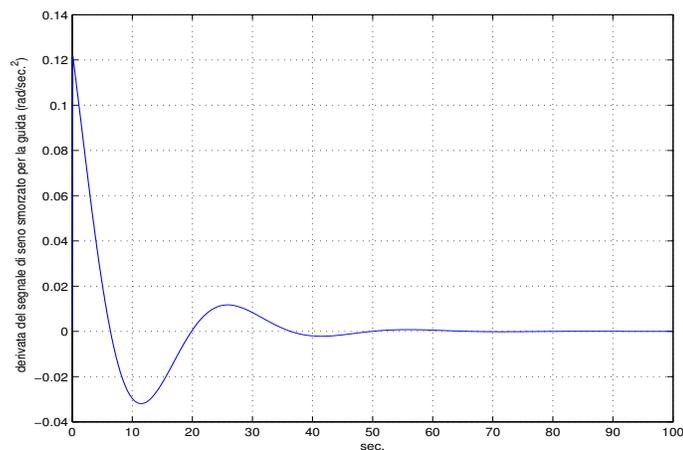


Figura 5.92: generatore di segnale di velocità angolare per il caso *slew*

Si ottengono i seguenti segnali di ingresso al controllore:

Figura 5.93: segnale di guida per la componente di *slew*Figura 5.94: segnale di guida per la derivata della componente di *slew*

In questo modo la derivata non ha più discontinuità e la manovra è molto simile a quella precedente. L'unica cosa su cui si può operare, modificando contemporaneamente ampiezza e *bias* dell'onda di seno, è il valore dell'angolo finale attorno all'asse prescelto. Con i valori scelti nelle seguenti simulazioni rimane un'angolo pari a circa 11° . Senza soffermarci su questi dettagli, facilmente modificabili, notiamo come il parametro α sia molto confortante dopo aver eliminato la discontinuità:

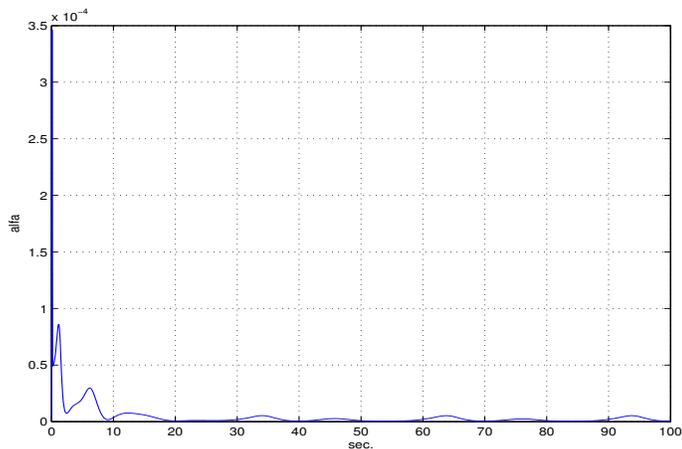


Figura 5.95: parametro α

Naturalmente nella simulazione in questione si è lasciato tutto invariato rispetto ai valori relativi all'evoluzione dello stato ($k_0 = 100$ e $\mathbf{K} = \text{diag}[100; 100; 100]$ e $\Omega_0 = [700; 700; 700; 700]^T \frac{\text{rad}}{\text{sec.}}$):

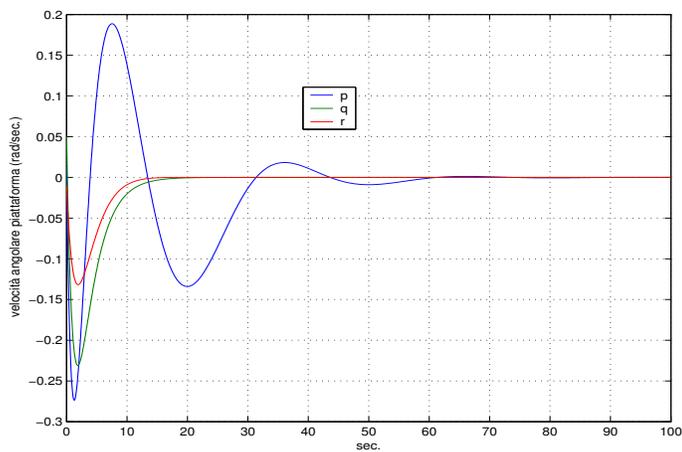


Figura 5.96: velocità angolare della piattaforma

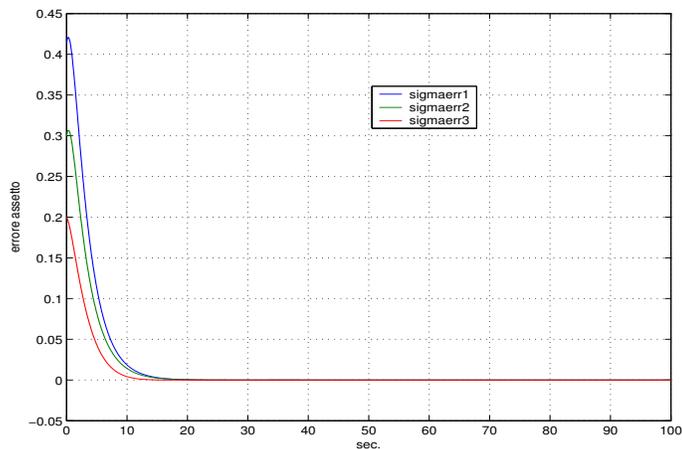


Figura 5.97: errore sull'assetto

Le coppie sui giunti sono:

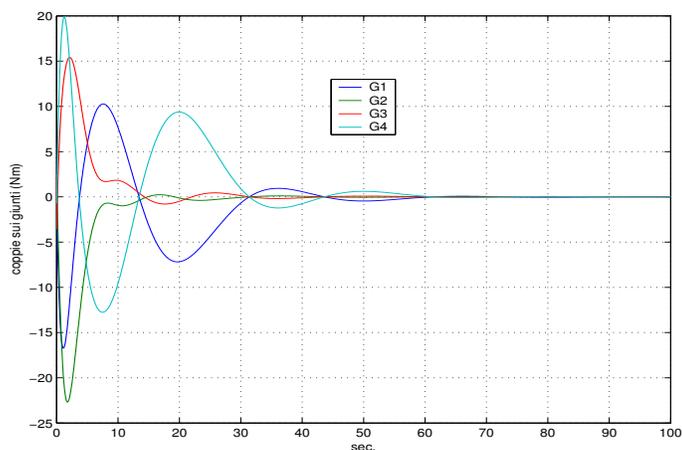


Figura 5.98: coppie sui giunti

Rispetto alla figura 5.88 i valori di coppia sono praticamente dello stesso ordine. Sparisce la discontinuità a 30sec. e il secondo picco è meno pronunciato avendo imposto una guida più *smooth*.

Per chiudere l'analisi di questa manovra, notiamo come si possa ritornare a valori di *spin* pari a $500 \frac{rad}{sec}$ soddisfacendo ancora la limitatezza di α . Le grandezze di stato restano le stesse di figura 5.96 e 5.97 mentre per il resto si ha:

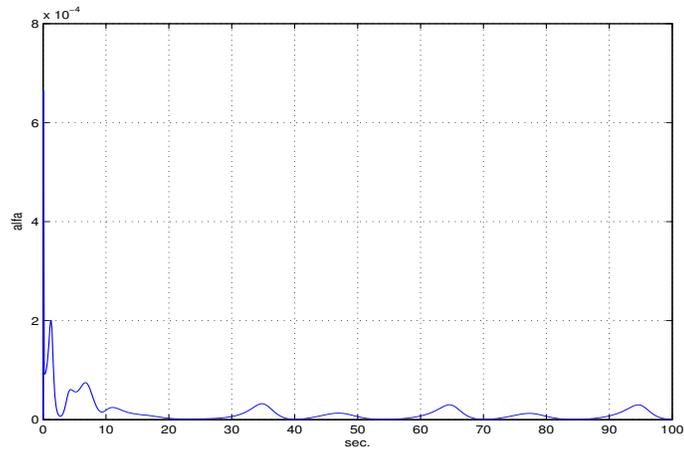


Figura 5.99: parametro α

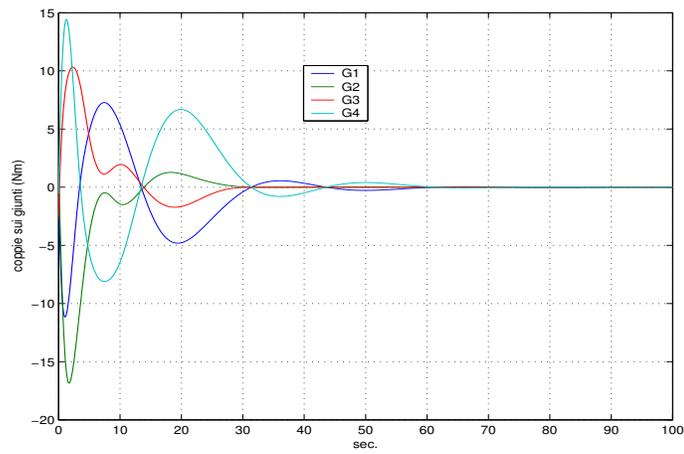


Figura 5.100: coppie sui giunti

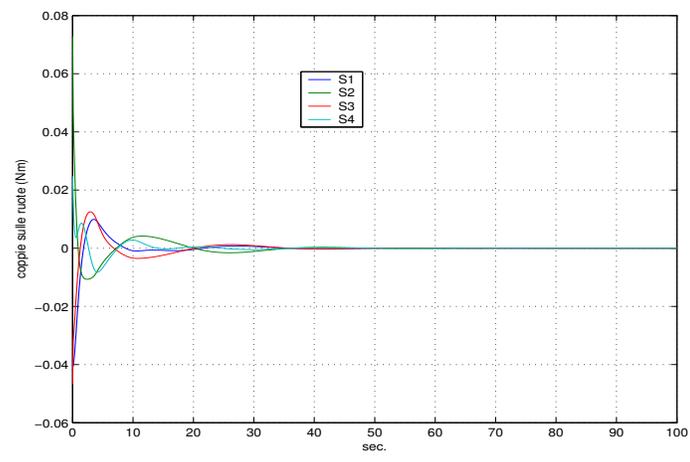


Figura 5.101: coppie sulle ruote

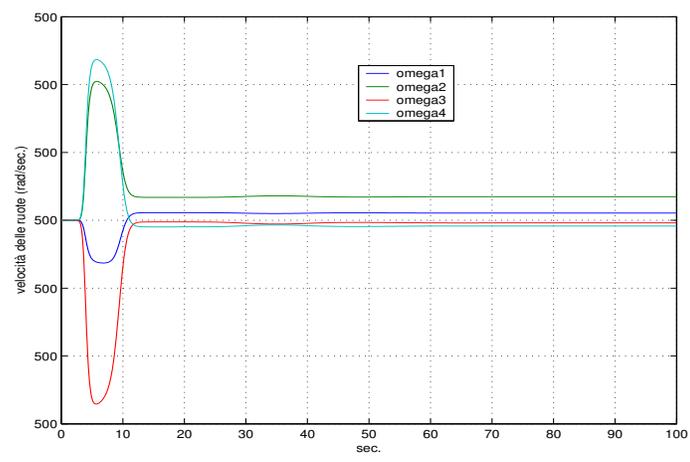


Figura 5.102: velocità delle ruote

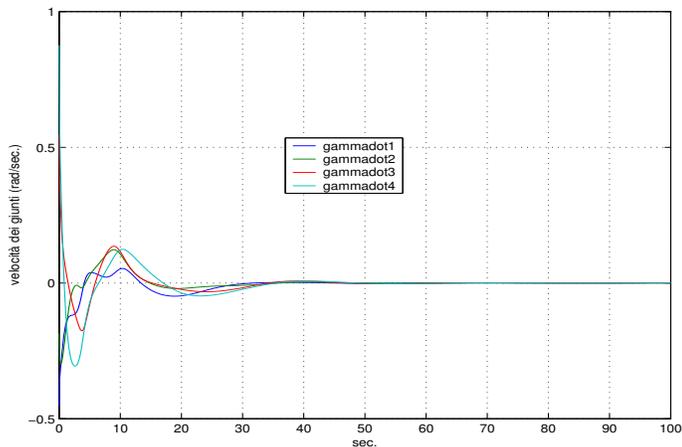


Figura 5.103: velocità dei giunti

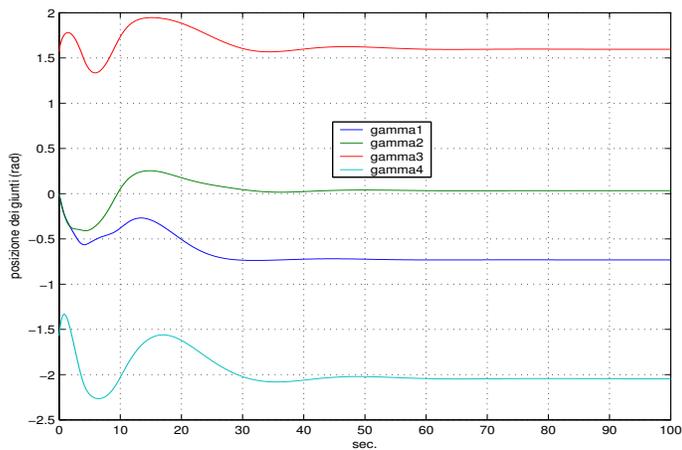


Figura 5.104: posizione dei giunti

Riportiamo contemporaneamente δ (diviso per 10^{15}) e le accelerazioni delle ruote; dove δ ha un minimo $\dot{\Omega}$ ha un massimo:

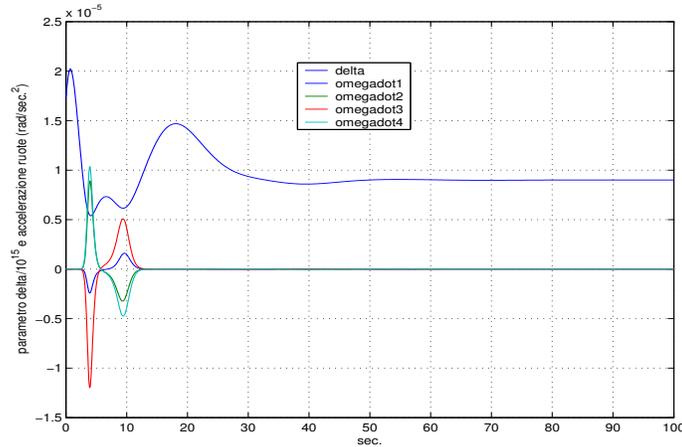


Figura 5.105: parametro delta e accelerazioni ruote

Un'ultima osservazione è d'obbligo per quel che riguarda il parametro μ . Dalle simulazioni e le prove effettuate si nota come, un valore troppo elevato venga a bloccare la possibilità di azionamento della modalità *R.W.*. Per il caso opposto poco da dire: scegliere $\mu = 0$ non cambia molto i risultati: la modalità *R.W.* è praticamente sempre attiva. In questo caso l'andamento di Ω è poco diverso e le altre variabili evolvono in maniera pressochè identica:

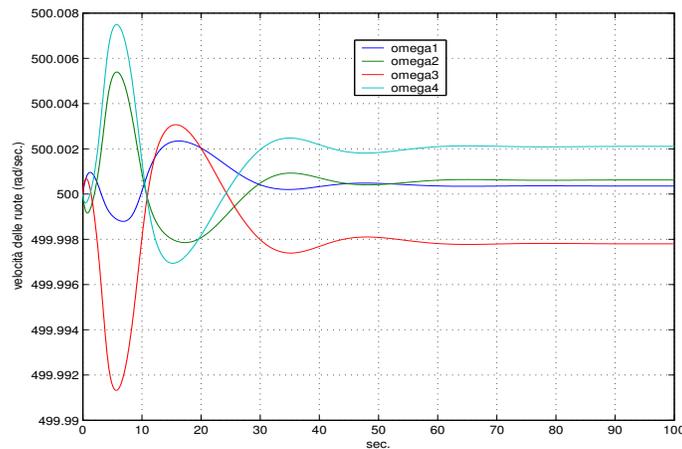


Figura 5.106: velocità delle ruote

Per μ basti dire quindi che v'è scelto sempre molto basso, per evitare crescite in α a causa di insufficiente risposta alle singolarità, senza necessità di una particolare analisi. L'influenza sulle manovre non è sostanziale come accade per \mathbf{K} e k_0 .

Per una completa visione della manovra rimandiamo alla visualizzazione della stessa. L'assetto iniziale e quello desiderato iniziale sono rispettivamente:

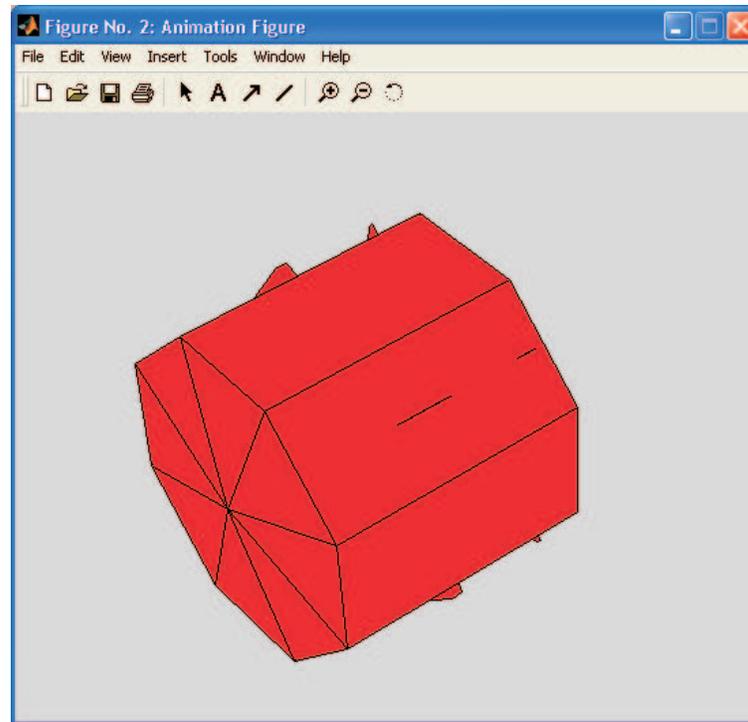


Figura 5.107: Assetto iniziale della Piattaforma Satellitare

mentre l'assetto iniziale desiderato è:

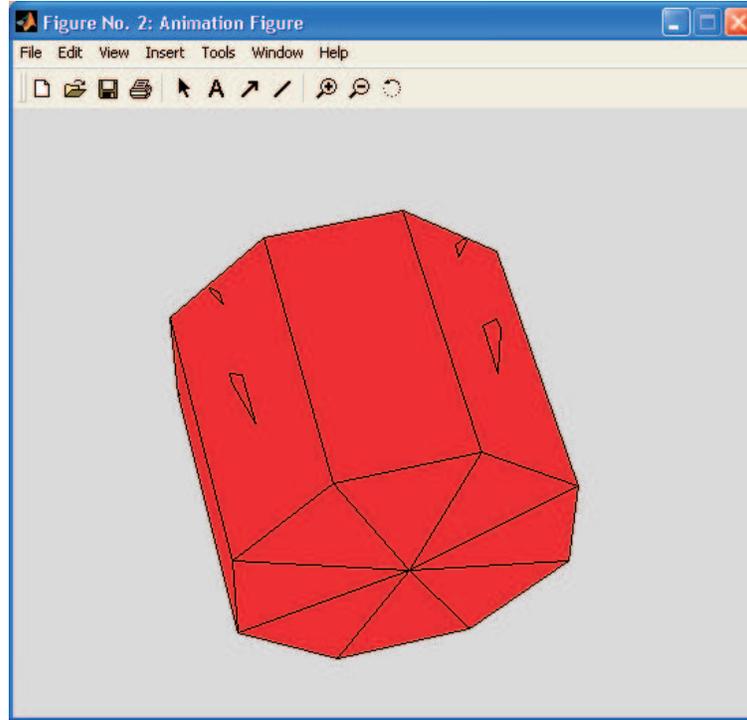


Figura 5.108: Assetto iniziale desiderato della Piattaforma Satellitare

5.3.2 Precessione

Forti delle osservazioni e deduzioni del paragrafo precedente possiamo permetterci un'analisi molto più rapida di questa manovra. Il moto desiderato è una rotazione a velocità costante pari a $0.3 \frac{rad}{sec.}$, attorno ad un asse corpo, e la precessione dello stesso attorno alla posizione iniziale desiderata (assi corpo sovrapposti ad assi della terna inerziale). La condizione di precessione viene rappresentata da due segnali sinusoidali di ampiezza $0.1 \frac{rad}{sec.}$ e periodo $30sec.$, sfasati di un angolo pari a $\frac{\pi}{2}$. La posizione iniziale reale del satellite, e quella desiderata, sono ancora quelle visualizzate in figura 5.107 e 5.108. Essendo la frequenza delle onde di seno la stessa usata per la precedente manovra, e la piattaforma satellitare identica, è lecito immaginare come i valori di \mathbf{K} e k_0 che fanno ottenere una buona visualizzazione della manovra, possano differire di poco. Con riferimento quindi alle tabelle 5.5 e 5.6, con la modifica di Ω_0 , scelto pari a $500 \frac{rad}{sec.}$ e variando i guadagni del controllore, riportiamo i due casi estremi. Infine il caso in cui la visualizzazione è ottimale.

- $k_0 = 100$ e $\mathbf{K} = diag[10; 10; 10]$ Si ricade nella casistica in cui la correzione d'assetto richiede sforzi eccessivi alla logica di controllo, portando errori oscillatori della velocità angolare e quindi su tutto lo stato. Il sistema converge alla condizione di errore nullo ma il risultato è un moto iniziale che possiamo definire caotico. Si riportano i primi $300sec.$ di simulazione, ottenuti sempre con *fixed step* e passo $0.1sec.$:

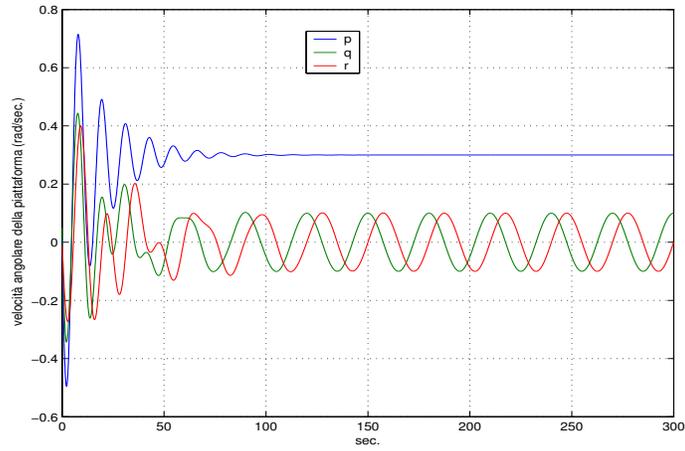


Figura 5.109: andamento velocità angolare piattaforma

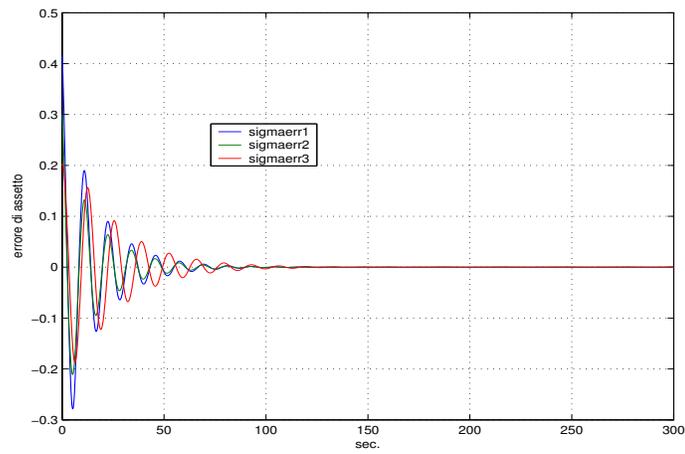


Figura 5.110: andamento errore d'assetto della piattaforma

Le variabili di controllo e i vari parametri risultano:

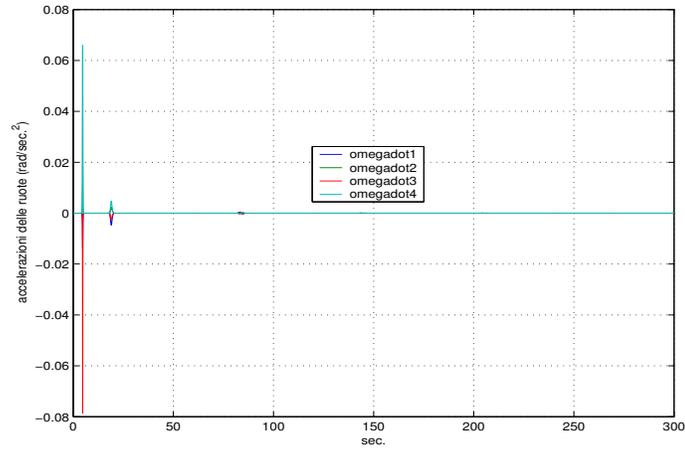


Figura 5.111: andamento accelerazioni delle ruote

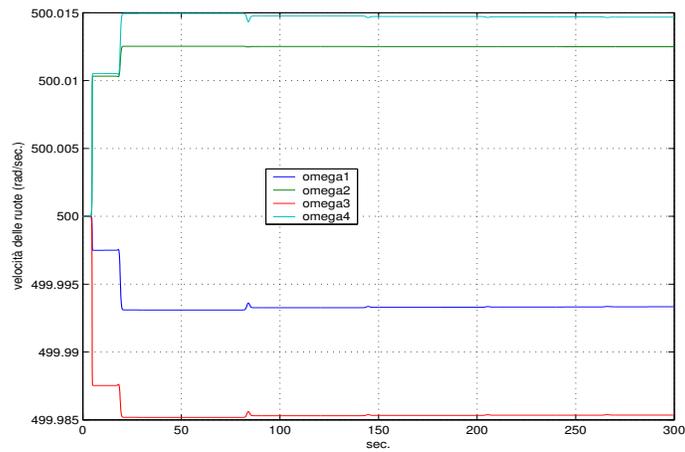


Figura 5.112: andamento velocità delle ruote

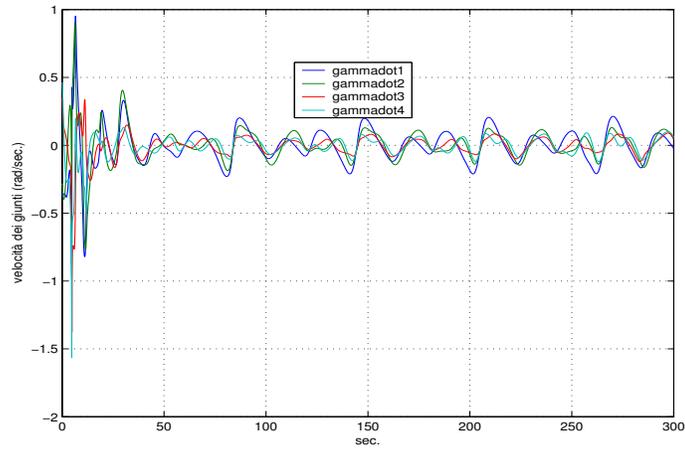
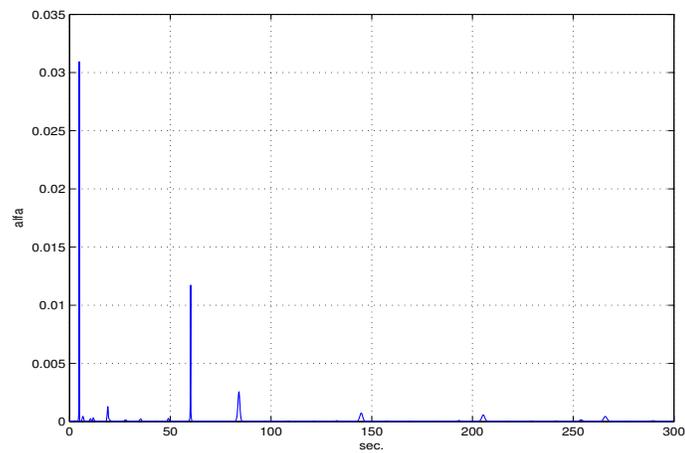


Figura 5.113: andamento velocità dei giunti

Lo sforzo di controllo, come atteso, si concentra in particolare all'inizio della manovra, a causa dell'eccessiva richiesta su σ_e . Ciò si evince anche dai parametri α e δ .

Figura 5.114: parametro α

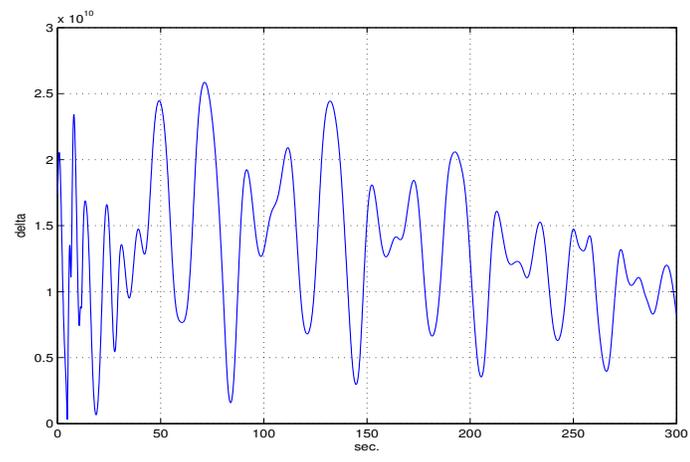


Figura 5.115: parametro δ

Infine le coppie:

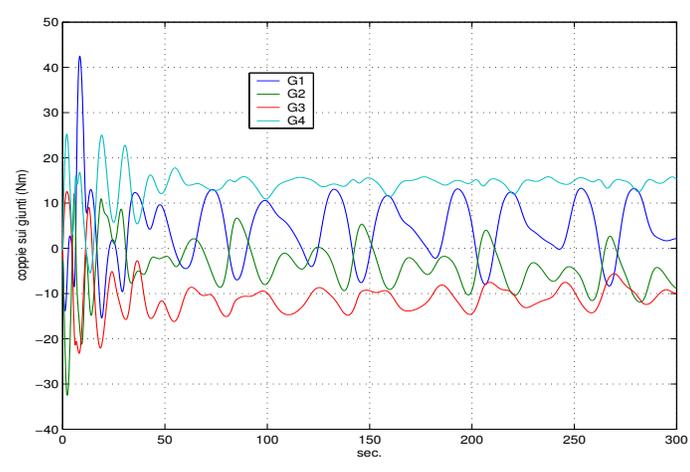


Figura 5.116: coppie sui giunti (Nm)

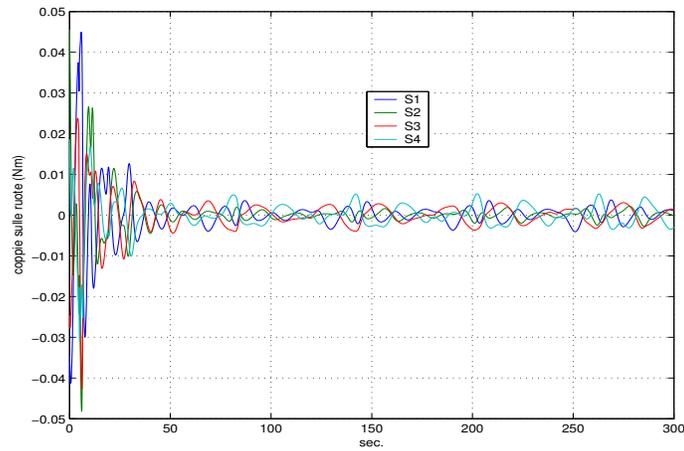


Figura 5.117: coppie sulle ruote (Nm)

Si osservi lo sforzo di coppia nella fase iniziale rispetto alla condizione di regime.

- $k_0 = 10$ e $\mathbf{K} = \text{diag}[100; 100; 100]$ Questo è il caso in cui l'errore d'assetto impiega molto tempo ad annullarsi:

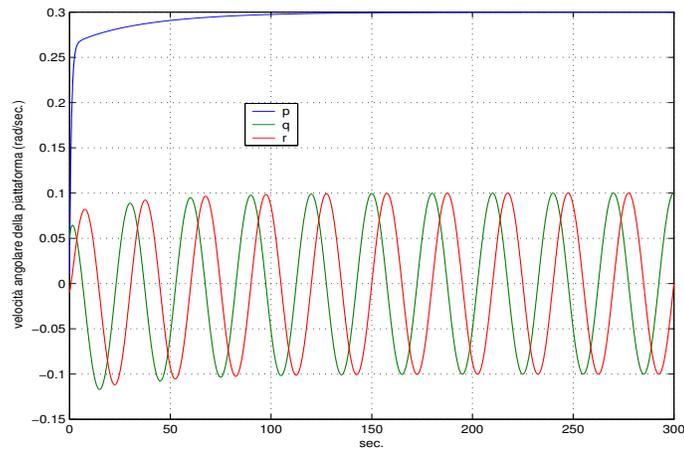


Figura 5.118: andamento velocità angolare piattaforma

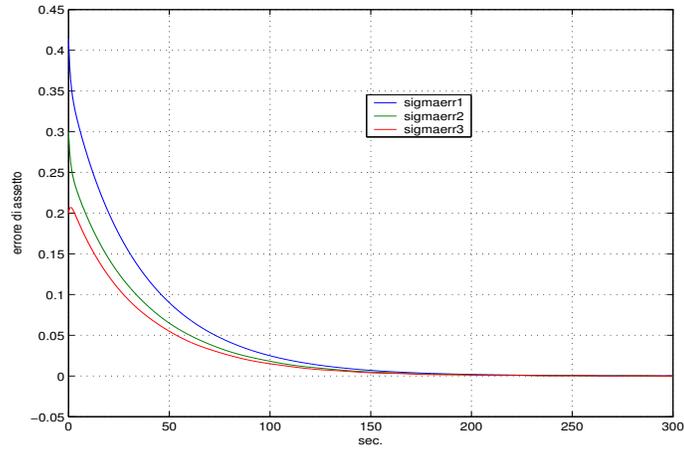


Figura 5.119: andamento errore d'assetto della piattaforma

Le variabili di controllo e i vari parametri risultano:

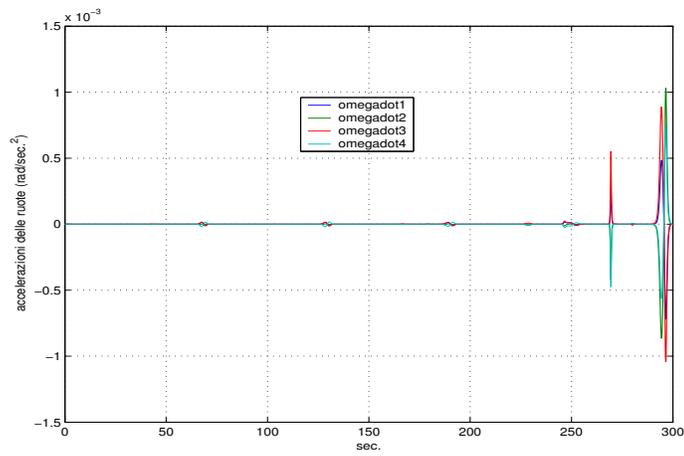


Figura 5.120: andamento accelerazioni delle ruote

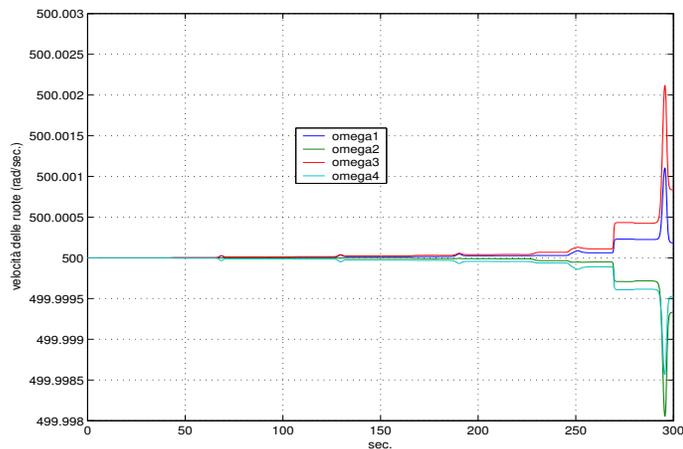


Figura 5.121: andamento velocità delle ruote

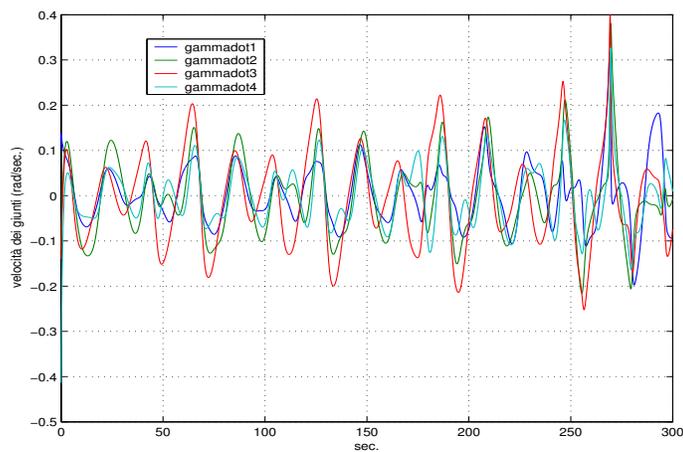


Figura 5.122: andamento velocità dei giunti

Ora lo sforzo di controllo non è più concentrato nella fase iniziale, non richiedendo la correzione d'assetto se non in maniera molto blanda. I valori più moderati delle variabili di controllo possono riassumersi nelle coppie erogate dai motori e nell'andamento dei parametri α e δ :

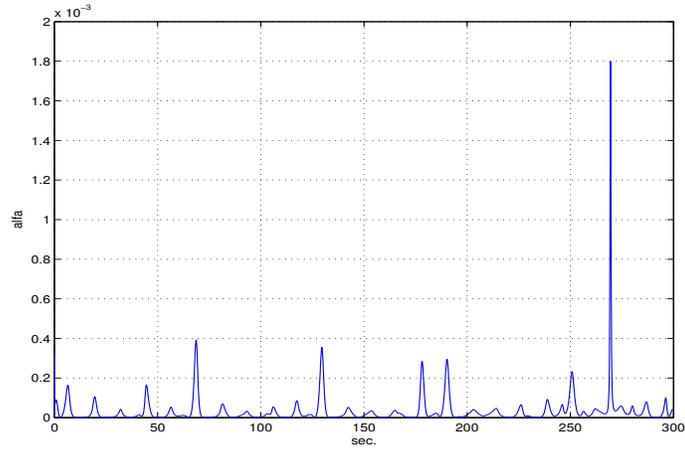


Figura 5.123: parametro α

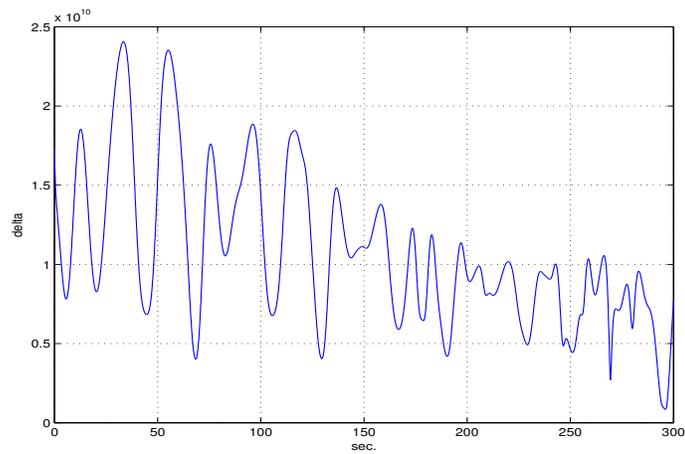


Figura 5.124: parametro δ

Infine le coppie:

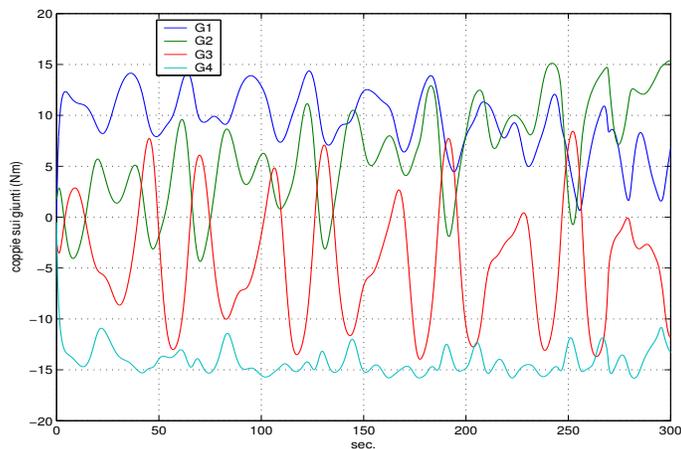


Figura 5.125: coppie sui giunti (Nm)

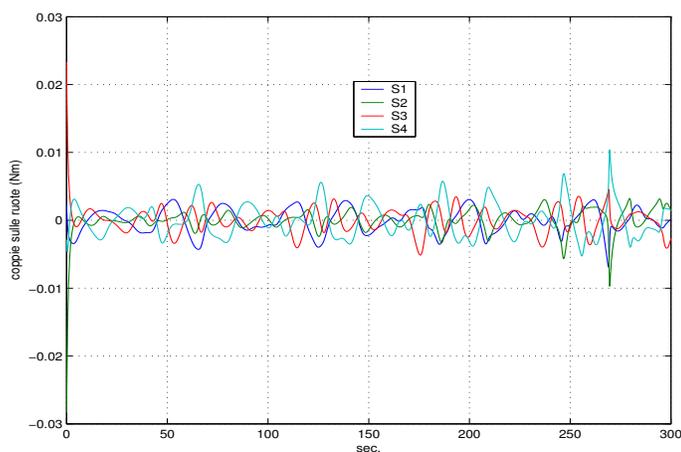


Figura 5.126: coppie sulle ruote (Nm)

D'obbligo il confronto tra le figure 5.116 e 5.125. Nell'ultimo caso si ottiene un andamento sostanzialmente periodico senza picchi di rilievo. L'unico picco riportato in figura 5.123 (peraltro il valore resta modestissimo) è dovuto al minimo assoluto di δ , il quale peraltro non si annulla mai. A conferma di quanto affermato riportiamo brevemente l'andamento del parametro di singolarità su tutta la simulazione di 1000sec.:

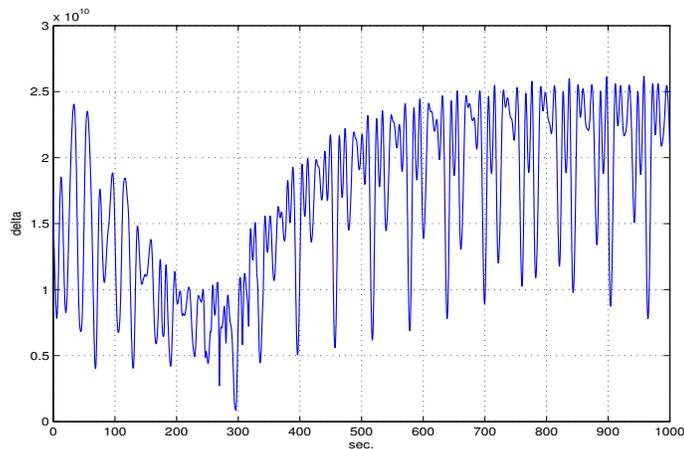


Figura 5.127: evoluzione del parametro δ in 1000sec. di simulazione

- $k_0 = 100$ e $\mathbf{K} = \text{diag}[30; 30; 30]$ Dopo una serie di prove parametriche, si sono scelti tali valori come compromesso tra i due casi estremi sopra riportati. Compare comunque una fase oscillatoria iniziale, durante la quale le coppie sui giunti e sulle ruote hanno dei picchi. Rispetto al caso con $k_0 = 100$ e $\mathbf{K} = \text{diag}[10; 10; 10]$ sono però di entità minore e la visualizzazione della manovra risulta a nostro avviso soddisfacente. Accettiamo dunque il compromesso quale una delle combinazioni ottimali per la manovra in esame. Le grandezze evolvono nel seguente modo:

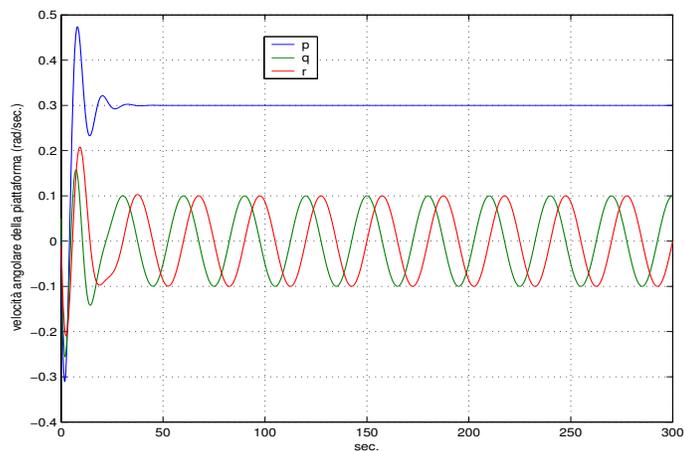


Figura 5.128: velocità angolare della piattaforma

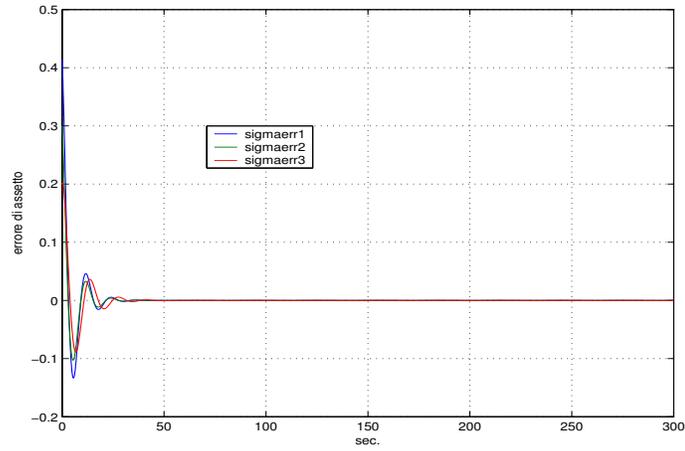


Figura 5.129: errore sull'assetto

Il vettore dei controlli genera:

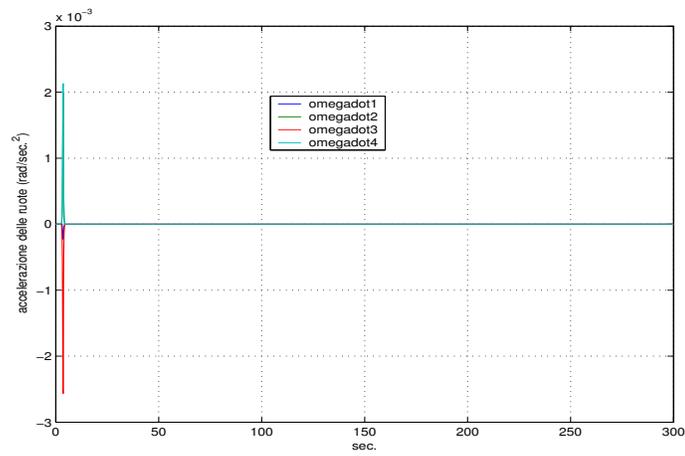


Figura 5.130: accelerazioni delle ruote

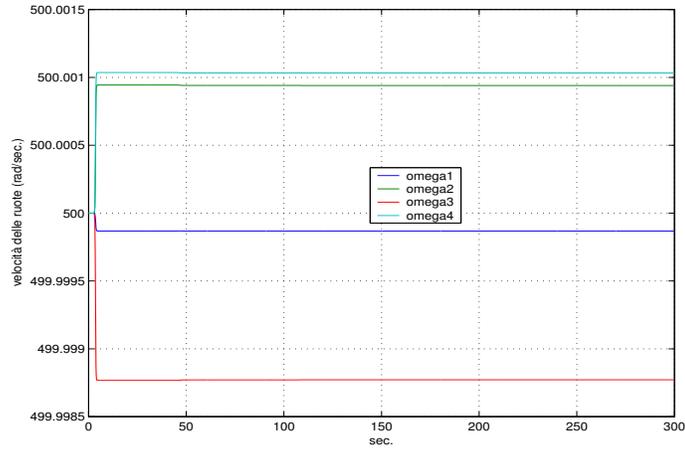


Figura 5.131: velocità delle ruote

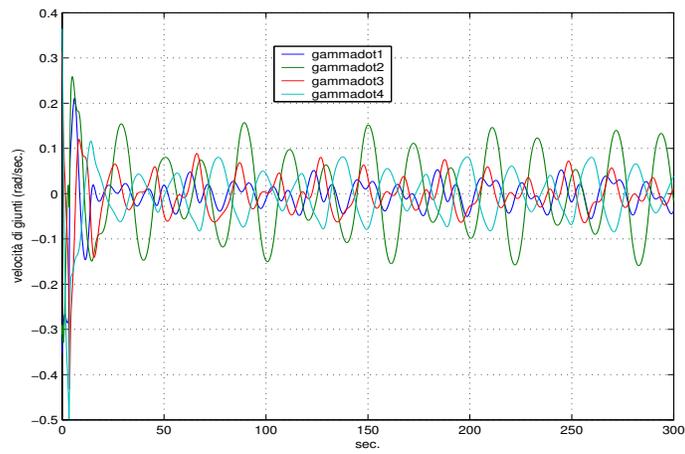


Figura 5.132: velocità dei giunti

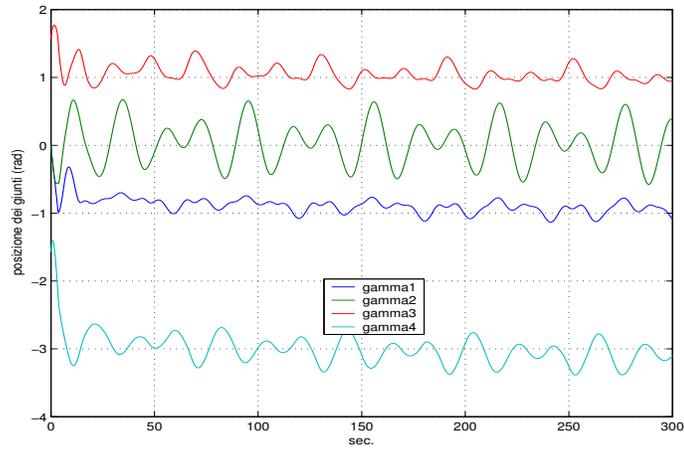


Figura 5.133: posizione dei giunti

I due parametri caratteristici della simulazione sono:

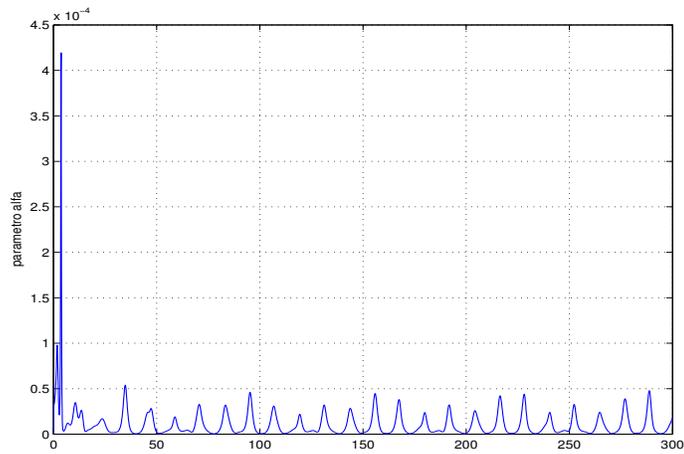
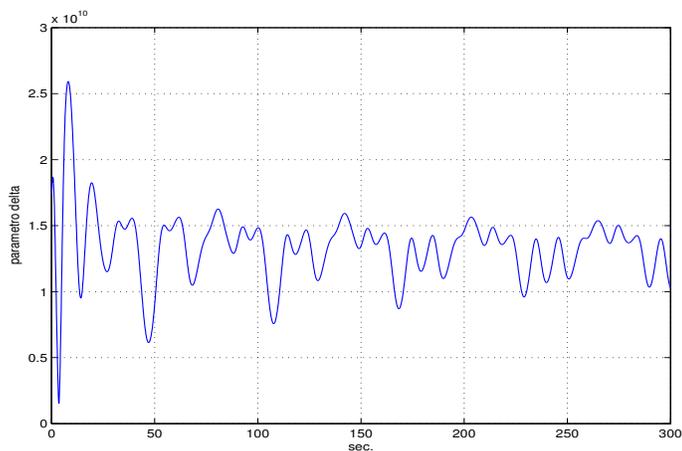


Figura 5.134: parametro α

Figura 5.135: parametro δ

Di nuovo, α presenta un picco (abbondantemente al di sotto della tolleranza di $\frac{1}{10}$) dove δ riporta il minimo assoluto (punto più vicino alla singolarità). Tale picco si trova nella fase iniziale a causa della richiesta di correzione d'assetto discretamente onerosa, ma comunque non impegnativa come nel caso estremo illustrato per primo. Per concludere questa panoramica si confrontino le figure 5.116 e 5.117 con le seguenti:

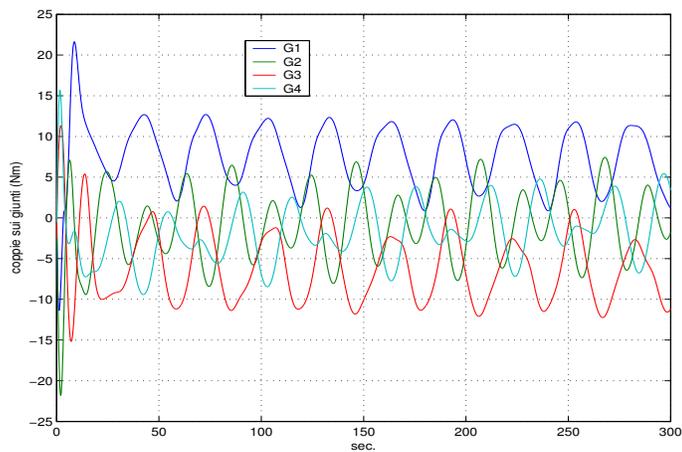


Figura 5.136: coppie sui giunti

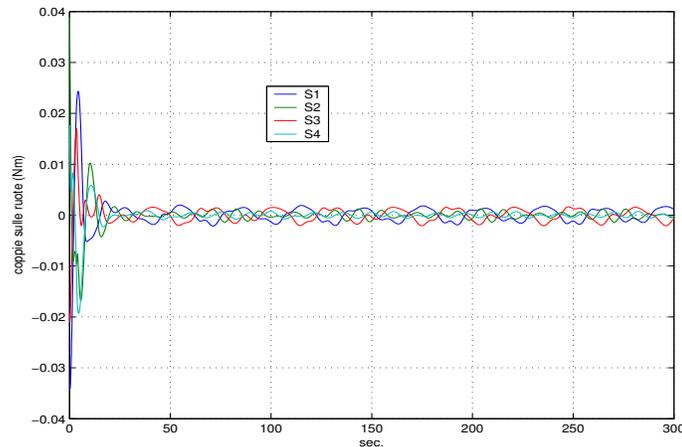


Figura 5.137: coppie sulle ruote

Lo sforzo di controllo è massimo all'inizio, ma non elevato come nel caso in cui \mathbf{K} è troppo basso.

Un'osservazione è d'obbligo: per la manovra di precessione, nella quale non sono imposti vincoli di tempo, e quindi il segnale di riferimento alimenta il controllo continuamente, non importa quanto tempo serve al satellite per correggere l'assetto. A meno che non imponiamo noi dei limiti temporali, il sistema presto o tardi converge al moto desiderato. Lo stesso discorso non può però ripetersi per manovre come quella di *slew*. In questi casi il tempo in cui il satellite risponde al comando di guida è fondamentale: se non c'è reazione entro certi limiti il comando si estingue e la piattaforma non esegue il moto desiderato, si porta sull'assetto giusto dopo aver eseguito tutt'altra manovra!

Gli esempi riportati sono dunque fondamentali ed indicativi per quanto riguarda i criteri di progettazione del controllore *Velocity Based*. Note le manovre che il sistema sarà chiamato ad effettuare, è necessario avere un occhio di riguardo per quelle a frequenza più elevata, per garantire la coerenza tra comando e risposta della piattaforma. Non si può quindi scegliere i parametri di controllo se non a seguito di una ricerca mirata tramite simulazioni numeriche.

Si è inoltre riportata una metodologia finalizzata a stimare l'attendibilità delle simulazioni effettuate, avendo trascurato del tutto le accelerazioni dei giunti. Non tenere a mente tale approssimazione potrebbe far ritenere utilizzabili set di parametri che nella realtà risulterebbero in discontinuità del controllo (istanti o fasi di non stretta monotonia della funzione di *Lyapunov*).

5.4 Failure Mode

Riportiamo brevemente le due manovre sopra analizzate, nel caso di secondo e quarto dispositivo *V.S.C.M.G.* non operativi, utilizzando i parametri che sono stati scelti come ottimali nei due paragrafi precedenti. I due giunti e ruote non operativi sono comunque tenuti in conto per quanto riguarda la loro inerzia a bordo del satellite (sono installati ma tenuti bloccati).

5.4.1 Slew Fail

Lo stato satellitare evolve come in figura 5.96 e 5.97 (i parametri di controllo sono gli stessi). Ciò che si viene a modificare è lo sforzo di controllo: risulta ovviamente più elevato a causa della disattivazione di due dei dispositivi:

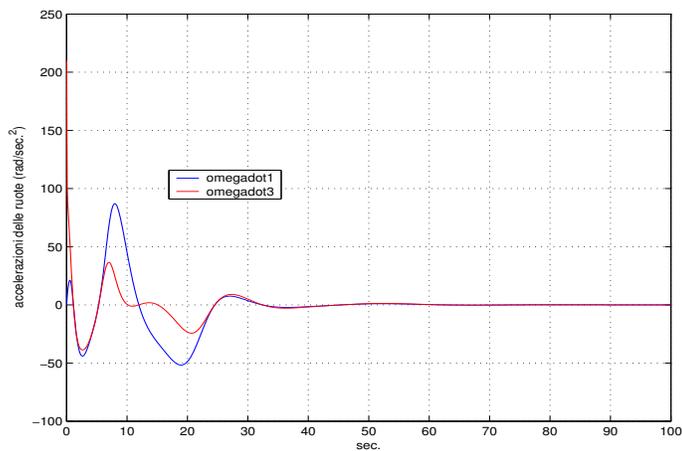


Figura 5.138: accelerazioni delle ruote

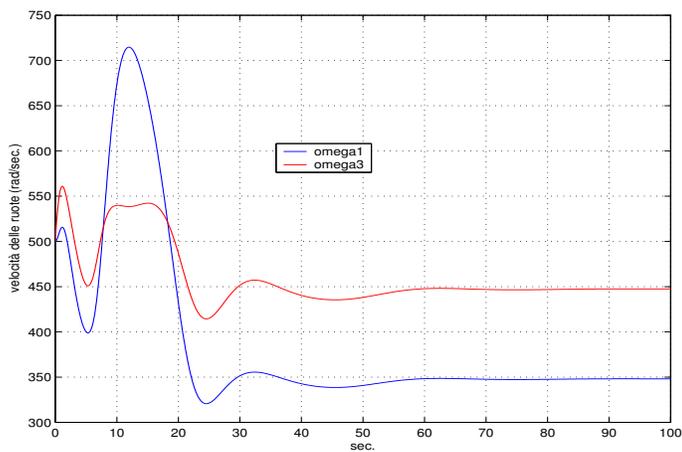


Figura 5.139: velocità delle ruote

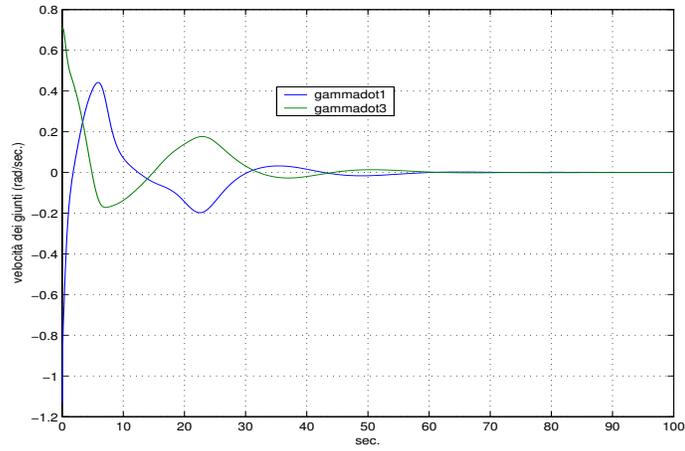


Figura 5.140: velocità dei giunti

I parametri e le coppie sono:

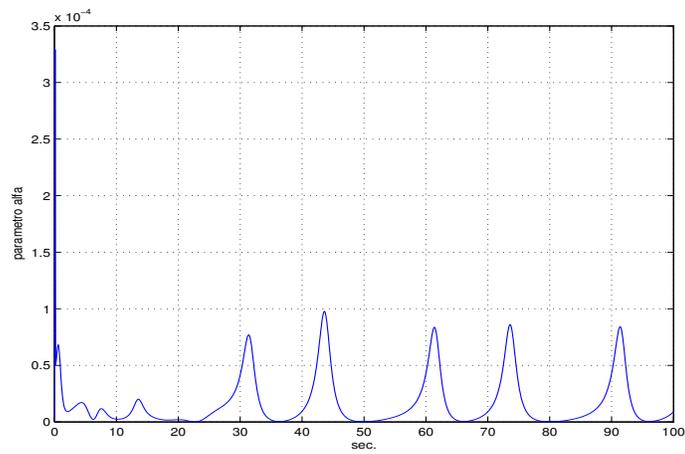


Figura 5.141: parametro α

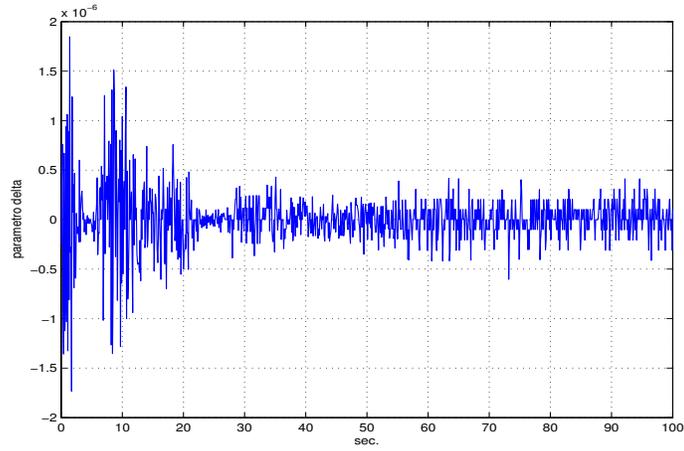


Figura 5.142: parametro δ

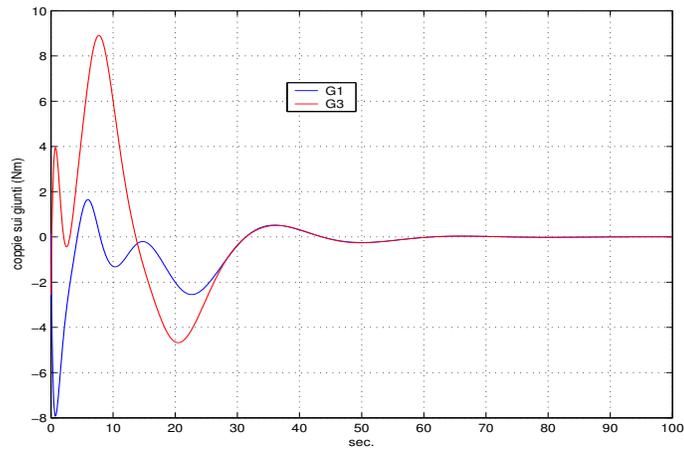


Figura 5.143: coppie sui giunti

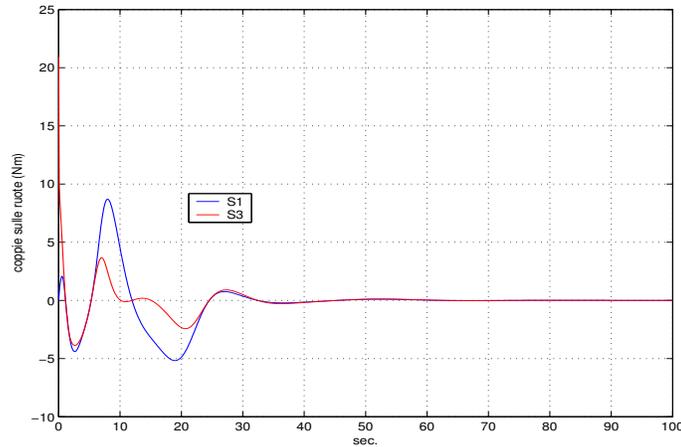
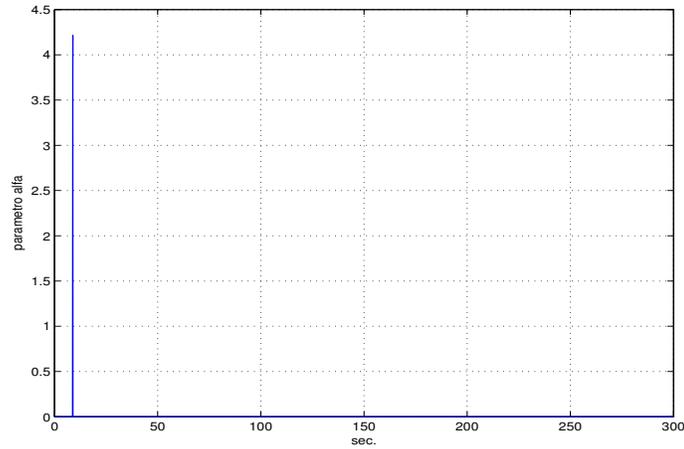


Figura 5.144: coppie sulle ruote

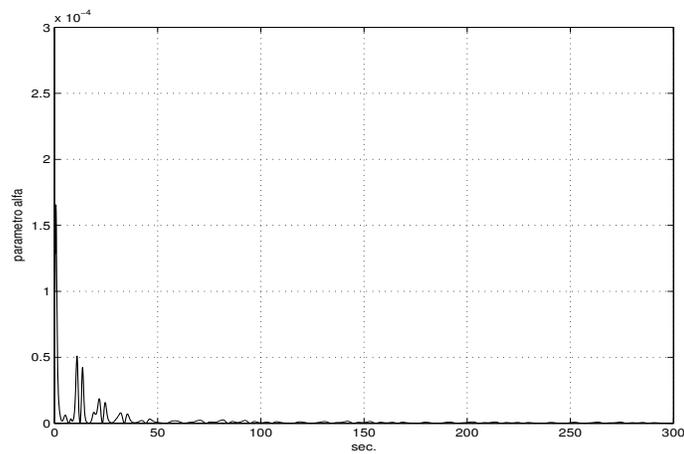
La differenza in termini di coppia sui giunti non è sostanziale (si veda la figura 5.100). Ciò che risalta all'attenzione è l'andamento del parametro δ : è sempre nullo o praticamente tale. Questo conferma quanto affermato nel paragrafo 1.3.4: con due dispositivi esiste sempre un piano parallelo ai due assi trasversi, perciò ogni configurazione è singolare. Difatti le ruote vengono accelerate fintanto che la manovra non si è esaurita, e le relative coppie sono ben diverse rispetto al grafico 5.101. Intercorrono ben tre ordini di grandezza tra i due andamenti! Dunque la costante singolarità si paga in termini di sforzi sulle ruote continuativi. Nel caso appena illustrato possiamo comunque ritenere accettabili i risultati ottenuti, sia in termini di α che di coppie da erogare.

5.4.2 Precessione Fail

Ben diversa è la situazione nel momento in cui la manovra, e quindi il segnale di guida, risultano periodici e non si estinguono al passare del tempo. Con gli stessi parametri ottimali ottenuti per 4 *V.S.C.M.G.*, nel caso della precessione, per la modalità *fail* si ottengono risultati non accettabili:

Figura 5.145: parametro α

Rinunciando alla rapida correzione d'assetto, in rapporto alla correzione in velocità, si può portare α entro la tolleranza scegliendo $k_0 = 100$ e $\mathbf{K} = \text{diag}[100; 100; 100]$: α risulta:

Figura 5.146: parametro α

Lo stato evolve in maniera diversa rispetto alle figure 5.128 e 5.129:

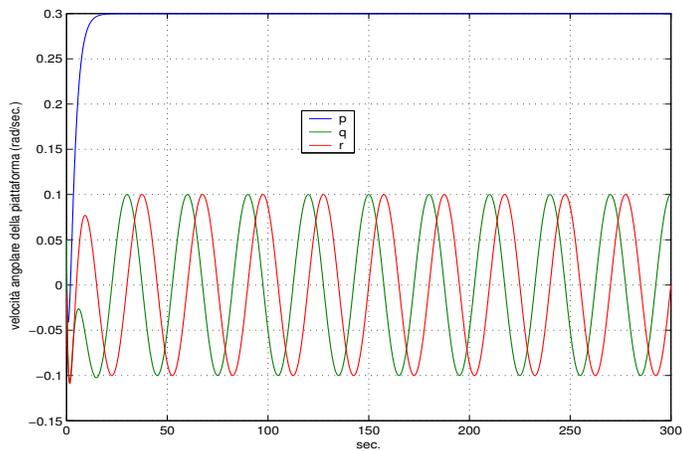


Figura 5.147: velocità angolare della piattaforma

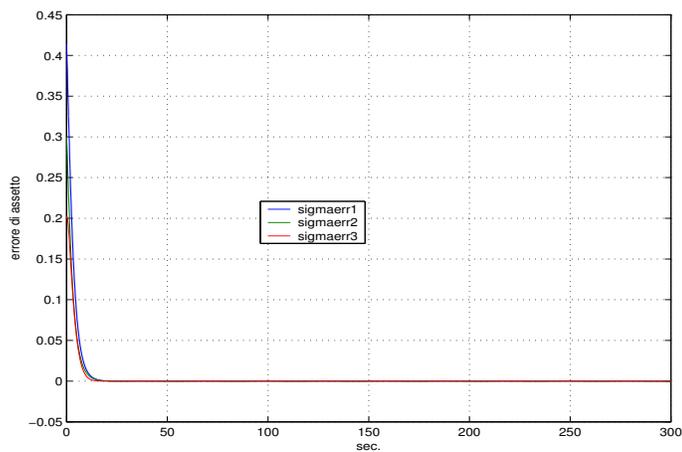


Figura 5.148: errore sull'assetto

Ricadendo nella casistica in cui il segnale di comando non si estingue in un certo tempo, possiamo accettare gli andamenti riportati. Il problema nasce ora a causa della permanente singolarità:

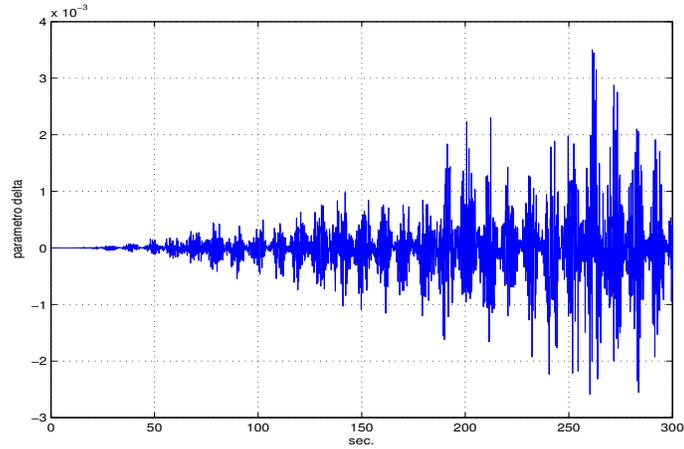


Figura 5.149: parametro delta

Come per la manovra precedente δ è praticamente nullo in ogni istante. Le ruote accelerano costantemente dando i seguenti risultati:

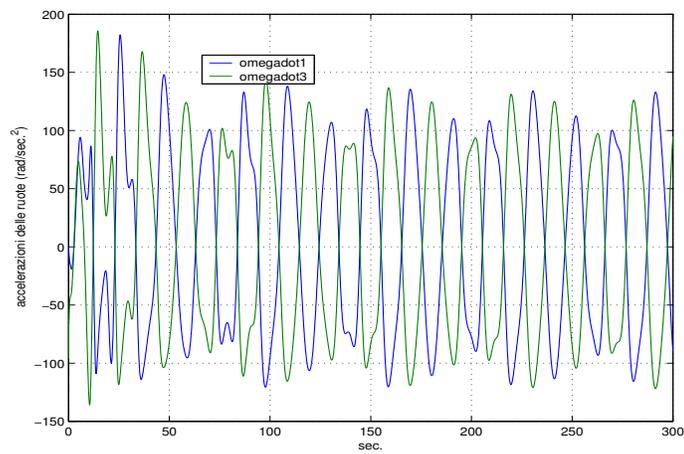


Figura 5.150: accelerazioni delle ruote

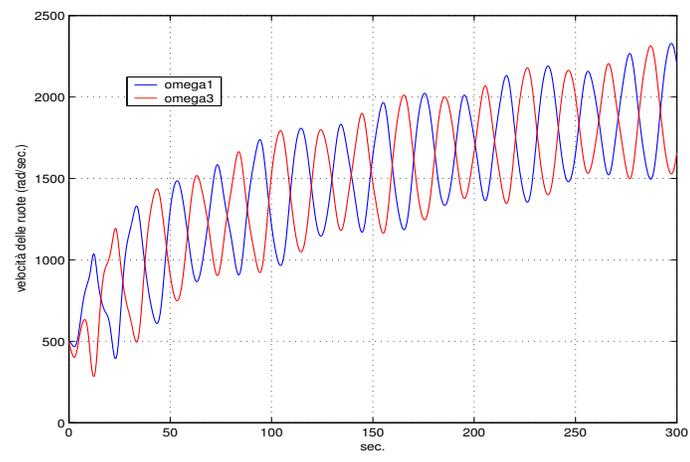


Figura 5.151: velocità delle ruote

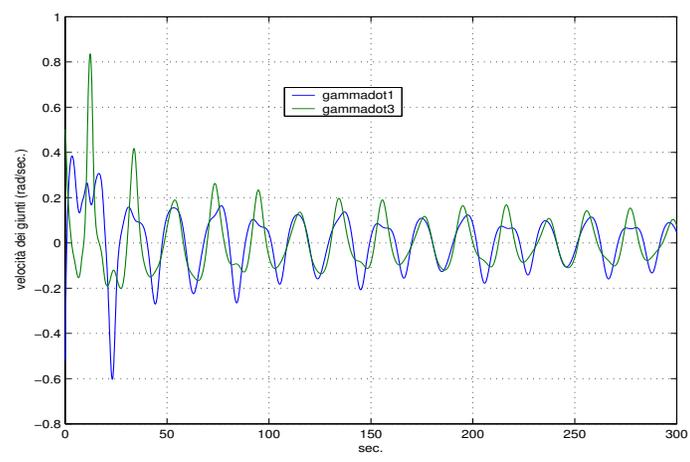


Figura 5.152: velocità dei giunti

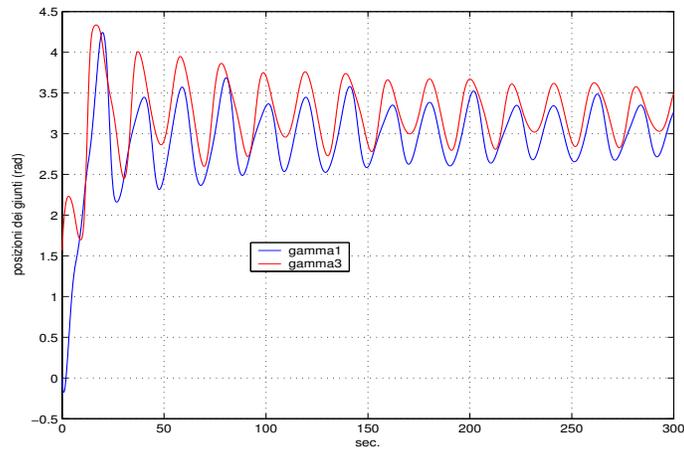


Figura 5.153: posizioni dei giunti

Notiamo come le ruote aumentino il proprio *spin* unendo un andamento secolare ad uno periodico. Ciò significa sforzi di coppia crescenti sui giunti, dovendo spostare un vettore momento della quantità di moto delle ruote crescente istante per istante:

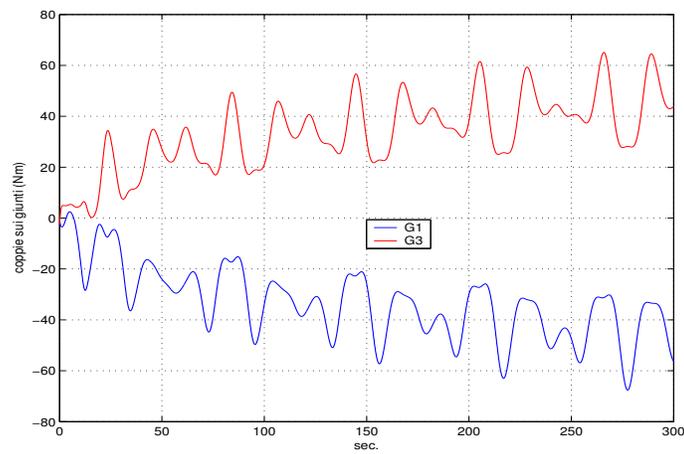


Figura 5.154: coppie sui giunti

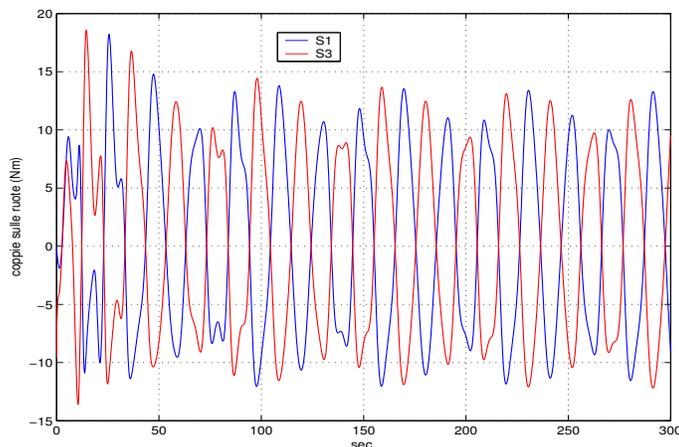


Figura 5.155: coppie sulle ruote

Questo esempio dimostra, assieme al precedente, come siano sufficienti due *V.S.C.M.G.* per controllare la piattaforma. La permanenza dello stato singolare costringe il sistema di controllo ad azionare continuamente la modalità *R.W.*. In alcune situazioni gli sforzi possono risultare accettabili ma in casi di manovre continuative, come per la precessione, i dispositivi vengono a saturarsi come le classiche *R.W.*.

D'altronde, non riuscendo a sfruttare praticamente mai il termine di amplificazione della coppia, il sistema si riduce a funzionare come delle ruote di momento in cui l'asse di spin è mobile ma senza guadagno di sorta. Solo in istanti in cui L_{rm} giace nel piano comune ai due assi trasversi, possiamo dire che si sta utilizzando l'*amplification torque property*. Come è facile immaginare tal caso è estremamente fortuito: i motori sui giunti sforzano in maniera crescente senza che se ne tragga alcun vantaggio!

L'analisi del *failure mode* ha dunque mostrato come si possa controllare anche in casi di mancanza della ridondanza, cosa che non può avvenire con un classico *C.M.G.* (ne servirebbero almeno tre). Ad ogni modo il comportamento del sistema deve far preferire un numero più elevato di dispositivi, in modo da limitare la possibilità di stati singolari.

Capitolo 6

Conclusioni

Gli obiettivi primari di questa tesi si sono basati sullo studio di un sistema di controllo non lineare per l'assetto di piattaforme satellitari. Gli attuatori scelti per tale finalità sono dei dispositivi denominati *Variable Speed Control Momentum Gyroscopes*, facenti parte della categoria delle *flywheels*.

Nel cap. 1 si sono ricavate, nell'ipotesi di corpi rigidi vincolati, le equazioni della dinamica d'assetto del satellite, equipaggiato con tali dispositivi, nonché la dinamica di questi ultimi. La notazione utilizzata è quella delle vettrici di *Hughes* ([26]). Si sono poi dedotte le relazioni per l'inseguimento d'assetto stabile secondo una metodologia alla *Lyapunov*. Definendo cioè un errore, in termini di discostamento in velocità e posizione, tra il moto della piattaforma e il moto desiderato per la stessa, si è imposto che il sistema dinamico non lineare, che ha come stato tale errore, abbia come punto di equilibrio l'origine dello spazio di stato e che tale punto di equilibrio sia globalmente, asintoticamente, stabile (figura 2.2) (*Slotine*, [23]). In altri termini, qualunque sia l'errore iniziale, il sistema converge verso la traiettoria desiderata (cap. 2).

La relazione di inseguimento stabile, che lega le grandezze caratteristiche del moto dei dispositivi *V.S.C.M.G.* allo stato satellitare, e alla legge di guida imposta, è stata tradotta dunque in un *feedback* di controllo per il veicolo spaziale, secondo due metodologie differenti: *Velocity Based* e *Torque Based* (cap 3).

Il software, necessario alle simulazioni numeriche di controllo e inseguimento d'assetto, è stato completamente sviluppato in **Simulink**[®] ([28]), con riferimento ad una configurazione piramidale del *cluster* di *V.S.C.M.G.* (figura 1.7), programmando pressochè *ex-novo* una libreria chiamata **V.S.C.M.G. Toolbox, V2.0** ([1, 15]). In essa compaiono i blocchi fondamentali per la costruzione dei modelli di *closed loop*, nonché una serie di accessori per visualizzazioni di manovre e alcuni programmi per simulazioni nel caso di *failure mode*.

Nel capitolo 5 si sono dunque riportate una serie di simulazioni numeriche volte, in primo luogo, ad additare i limiti ed i problemi dei classici sistemi *R.W.* e *C.M.G.* rispetto agli attuatori *V.S.C.M.G.*. In seguito si sono messe a confronto le due filosofie di controllo. Delle due solo una è risultata fisicamente accettabile in termini di evoluzione delle variabili di controllo: sebbene soluzione approssimata della relazione di stabilità 2.14, in cui trascuriamo le accelerazioni dei giunti (si veda il parametro riportato in 3.6), il controllore *Velocity Based* ha il vantaggio di

agire direttamente sulle velocità dei *gimbals* e di poter quindi governare il *device* di controllo secondo una ben determinata logica. Nel caso *Torque Based*, dove non si opera alcun tipo di approssimazione, si perde tale possibilità, e le accelerazioni di giunti e ruote sono trattate alla stessa stregua ([2]). Avendo inoltre incluso le velocità dei giunti nello stato, il termine di amplificazione della coppia non viene più tenuto in considerazione come nel *Velocity Based*, ma entra a far parte della coppia richiesta T (relazione 3.27). In questo modo il controllore genera valori elevati delle coppie che non sono fisicamente possibili.

Scelto dunque il controllore *Velocity Based* come la miglior strada perseguibile, si è proceduto ad un'analisi dell'influenza dei parametri di controllo sulla risposta del sistema, tenendo sempre a mente la stima del parametro α , che deve rimanere entro una certa tolleranza per poter accettare la simulazione e quindi l'approssimazione operata. Scelte due manovre d'assetto (*slew* e precessione, si vedano [6] e [22]), si è messa in risalto l'influenza dei valori di *spin* delle ruote sulla possibilità di incontrare stati singolari. Ancora, si è compreso e sottolineato come i guadagni di controllo \mathbf{K} e k_0 non possano essere scelti arbitrariamente. A seconda del tipo di manovra, e quindi del segnale di guida, è necessario conoscere gli eventuali vincoli temporali in cui il satellite deve rispondere. Nel caso della manovra di *slew* si è infatti notato come risultato fondamentale una correzione rapida dell'assetto iniziale prima che il veicolo operi la manovra vera e propria. Nel caso in cui non si tenga conto di tale legame inscindibile tra \mathbf{K} e k_0 , si rischia, soprattutto per manovre in cui il comando si estingue in tempi rapidi, di ottenere risultati tutt'altro che soddisfacenti, se non del tutto diversi da quello desiderato.

In questo modo si è dunque indicata una metodologia per la progettazione di controllori *Velocity Based*, tramite la spiegazione delle varie dipendenze parametriche.

A dimostrazione della sufficienza di due *V.S.C.M.G.* per il controllo d'assetto ([3]), si sono riportate le precedenti manovre, effettuate con soli due dispositivi operativi. Come era lecito aspettarsi, gli sforzi di controllo sono risultati maggiori che nel caso di totale operatività. Inoltre, la permanenza della singolarità, caratteristica geometrica di un sistema di due *V.S.C.M.G.* o *C.M.G.*, impone alle ruote di accelerare in maniera continuativa, rischiando, soprattutto per manovre prolungate, di saturare i dispositivi (si veda il par.5.4.2). Tali risultati sono dunque a sostegno della scelta effettuata di un sistema simmetrico e ridondante di 4 attuatori.

Tra gli sviluppi futuri indichiamo la ricerca di una metodologia più generale per la gestione dei *V.S.C.M.G.*, la quale non richieda di trascurare alcuni termini e dover quindi poi stimare l'approssimazione effettuata. Nel presente lavoro si è riportata la versione di controllo *Torque Based*, del tutto generale ed ineccepibile dal punto di vista teorico e numerico, ma inutilizzabile praticamente, a causa dei valori di coppia generati, nonché dei loro tassi di variazione. Lo studio di una diversa versione del *Torque Based* (modificando ad esempio la funzione da minimizzare riportata in 3.31) o un approccio del tutto nuovo al problema, possono essere delle strade percorribili al fine di dare una generalità maggiore alla soluzione. Sottolineiamo come il problema sia tuttora allo studio della comunità scientifica, soprattutto in unione alla possibilità di un sistema di integrazione **I.P.A.C.S** (**I**ntegrated **P**ower and **A**ttitude **C**ontrol **S**ystem, [20, 3, 9, 11, 13, 14]). Come indicato nell'introduzione, è recente la notizia divulgata dalla **N.A.S.A.** secondo la quale sono a livello di sperimentazione dispositivi *flywheels* in grado di operare fino a 60.000 RPM ([4]). Grazie all'impiego di materiali compositi e di supporti mag-

netici, risulta sempre più probabile la costruzione di sistemi sostitutivi delle batterie di bordo. Questi nuovi sistemi integrati sfrutterebbero i gradi di libertà in più dei *V.S.C.M.G.* per accumulare energia sotto forma di rotazione, nella fase illuminata, e restituirla nella fase di volo in ombra. Allo stesso tempo viene effettuato il controllo d'assetto.

Sistemi integrati di questo genere risulterebbero di maggior durata delle batterie chimiche (la cui vita è limitata a circa 5 anni), operativi in range più ampi di temperatura, e con una densità di energia maggiore.

Infine indichiamo possibili modifiche alla **V.S.C.M.G. Toolbox, V2.0** in modo da portarla ad un livello di programmazione ancor più elevato per l'utente. Con delle modifiche sostanziali si possono portare in maschera un maggior numero di informazioni, come ad esempio il numero $n \geq 2$ di dispositivi e l'esatta disposizione all'interno del veicolo di ognuno di essi. In questo modo i modelli non sarebbero più vincolati ad una configurazione predeterminata del *cluster* di controllo, risultando maggiormente versatili in termini di progettazione e simulazioni.

Appendice A

Appendice: Precessione Regolare

In questa appendice daremo la descrizione dei moti rigidi alla **Poinsot**, focalizzando l'attenzione sulle precessioni regolari effettuate dai corpi giroscopici.

def 1 *Un moto rigido sferico è detto alla **Poinsot** se la somma dei momenti esterni, rispetto al punto fisso O , è zero.*

In altri termini il bilancio del momento della quantità di moto può indicarsi come segue:

$$\dot{\vec{h}}_O = 0$$

Si ottengono così tre integrali primi del moto, relativi alla conservazione del momento angolare: $\vec{h}_O = \text{cost}$. Un'altra quantità che si conserva è l'energia cinetica. Difatti il lavoro delle azioni esterne risulta nullo:

$$\mathcal{L} = \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{v}_O dt + \vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\omega} dt$$

per definizione, nei moti alla **Poinsot** è $\vec{v}_O = 0$, $\vec{\mathbf{M}}_O = 0$. Ogni variazione di energia cinetica eguaglia il lavoro fatto dalle forze esterne, perciò $dT = 0$. Scrivendo le equazioni di *Eulero* nella terna corpo principale d'inerzia \mathcal{F}_b , per un moto alla **Poinsot**, si ottiene:

$$\begin{aligned} I_\xi \dot{\omega}_\xi + (I_\eta - I_\zeta) \omega_\eta \omega_\zeta &= 0 \\ I_\eta \dot{\omega}_\eta + (I_\zeta - I_\xi) \omega_\zeta \omega_\xi &= 0 \\ I_\zeta \dot{\omega}_\zeta + (I_\xi - I_\eta) \omega_\xi \omega_\eta &= 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Moltiplicando la prima equazione per ω_ξ , la seconda per ω_η , la terza per ω_ζ , e sommando, è:

$$I_\xi \dot{\omega}_\xi \omega_\xi + I_\eta \dot{\omega}_\eta \omega_\eta + I_\zeta \dot{\omega}_\zeta \omega_\zeta + [(I_\eta - I_\zeta) + (I_\zeta - I_\xi) + (I_\xi - I_\eta)] \omega_\xi \omega_\eta \omega_\zeta = 0$$

e, dopo alcuni calcoli algebrici:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (I_\xi \omega_\xi^2 + I_\eta \omega_\eta^2 + I_\zeta \omega_\zeta^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} T = 0$$

a conferma della conservazione dell'energia cinetica.

def 2 Un moto rigido sferico è detto *precessione regolare* se la velocità angolare è costantemente la somma di due vettori di cui uno è fisso nel riferimento inerziale, ad identificare l'asse di precessione, l'altro è fisso nel riferimento corpo, ad identificare l'asse di figura.

A questo punto studiamo il moto di **Poinsot** per un giroscopio, e cioè un corpo rigido che abbia due momenti principali d'inerzia uguali. Poniamo dunque $I_\xi = I_\eta$. In questa circostanza le equazioni di *Eulero* diventano:

$$\begin{aligned} I_\xi \dot{\omega}_\xi + (I_\xi - I_\zeta) \omega_\eta \omega_\zeta &= 0 \\ I_\xi \dot{\omega}_\eta + (I_\zeta - I_\xi) \omega_\zeta \omega_\xi &= 0 \\ I_\zeta \dot{\omega}_\zeta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Immediatamente si nota come $\omega_\zeta = \text{cost.}$ e $\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = \text{cost.}$ Sia $\mathcal{F}_b = [\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3]^T$ la vettrice associata ad \mathcal{F}_b . L'espressione generale del momento angolare per un giroscopio risulta:

$$\vec{\mathbf{h}}_O = I_\xi \omega_\xi \hat{\mathbf{e}}_1 + I_\xi \omega_\eta \hat{\mathbf{e}}_2 + I_\zeta \omega_\zeta \hat{\mathbf{e}}_3 = I_\xi (\omega_\xi \hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_\eta \hat{\mathbf{e}}_2) + I_\zeta \omega_\zeta \hat{\mathbf{e}}_3$$

dunque:

$$\vec{\mathbf{h}}_O = I_\xi \vec{\omega} + (I_\zeta - I_\xi) \omega_\zeta \hat{\mathbf{e}}_3$$

Possiamo esplicitare la velocità angolare di un giroscopio:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{I_\xi} \vec{\mathbf{h}}_O + \frac{I_\xi - I_\zeta}{I_\xi} \omega_\zeta \hat{\mathbf{e}}_3$$

Tale relazione vale per qualsiasi moto di un giroscopio. Nel caso del moto alla **Poinsot** tuttavia ω_ζ non varia nel tempo e $\vec{\mathbf{h}}_O$ è costante nella terna inerziale. Ciò dimostra come la velocità angolare sia somma di due termini, uno costante nella terna inerziale, l'altro in assi corpo. Il moto alla **Poinsot** di un giroscopio è sempre, a prescindere dalle condizioni iniziali, una precessione regolare. Se inizialmente $\vec{\omega}$ è parallelo ad uno degli assi d'inerzia, la precessione regolare degenera in un moto rotatorio uniforme. Infatti se $\vec{\omega}_0 \parallel \hat{\mathbf{e}}_{1,2}$ dalla relazione precedente si ottiene $\vec{\omega} = \frac{1}{I_\xi} \vec{\mathbf{h}}_O$, essendo $\omega_\zeta = \omega_{\zeta 0} = 0$. Se $\vec{\omega}_0 \parallel \hat{\mathbf{e}}_3$ dalle relazioni di **Poinsot** abbiamo $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_3 = \vec{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}_3 = 0$ e dunque $\vec{\omega} = \text{cost.}$

Il moto di ogni pianeta soggetto ad un campo gravitazionale è, in prima approssimazione, un moto alla **Poinsot**, se studiato rispetto al centro di massa. I pianeti approssimano molto bene i giroscopi e il gradiente di gravità è spesso trascurabile.

Bibliografia

Articoli

- [1] D.R.Izzo *Mathematical Modelling and Computer Implementation of a new non linear Feedback for Variable Speed Control Moment Gyros*, Cranfield Publications, Cranfield University, UK, September 26, 2002.
- [2] H.Shaub, S.R.Vadali, J.L.Junkins *Feedback Control Law for Variable Speed Control Moment Gyros* Journal of the Astronautical Science, Vol.46, No. 3, 1998.
- [3] H.Yoon and P.Tsiotras *Spacecraft adaptive attitude control and power tracking with single-gimballed VSCMG and wheel speed equalization* Paper AAS 01-379
- [4] Caswell, P., *Getting Flywheels Ready to Fly*, GRC News Release 00-017 [on line] URL:<http://www.lerc.nasa.gov/WWW/PAO/pressrel/2000/00-017.html> [cited 15 Jan.2002], NASA Glenn Research Center, March 2000.
- [5] K.A.Ford and C.D.Hall *Singular Direction Avoidance Steering for Control Moment Gyros* Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.23, No. 4, July-August 2000.
- [6] G.Avanzini and G. de Matteis *A Local Optimization Technique for Attitude Motion Tracking Using Control Moment Gyros* Paper AAS 01-106, AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Santa Barbara, CA, 11-14 February 2001.
- [7] P.Tsiotras, J.L.Junkins, H.Schaub *Higher Order Cayley Transforms with Applications to Attitude Representation* Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.20, No.3, May-June 1997.

- [8] H.Shaub, J.L.Junkins *CMG Singularity Avoidance using VSCMG Null Motion* AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, August 10-12, 1998 / Boston, MA.
- [9] J.L.Fausz, D.J.Richie *Flywheel Simultaneous Attitude Control and Energy Storage Using a VSCMG Configuration* Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications, Anchorage, Alaska, USA, September 25-27, 2000.
- [10] S.N.Singh, T.C.Bossart *Exact Feedback Linearization and Control of Space station Using CMG* IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.38, No.1, January 1993.
- [11] B.T.Costic, M.S. de Queiroz, D.M.Dawson, Y.Fang *Energy Management and Attitude Control Strategies using Flywheels* Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida USA, December 2001.
- [12] R.H.Bishop et al. *Adaptive Control of Space Station with Control Moment Gyros* Conference on Decision and Control, Brighton, UK, 11-13 December 1991.
- [13] D.J.Richie, P.Tsiotras and J.L.Fausz *Simultaneous Attitude Control and Energy Storage using VSCMGs: Theory and Simulation* Proceedings of the American Control Conference, Arlington, VA, 25-27 June, 2001.
- [14] P.Tsiotras and H.Shen *Satellite Attitude Control and Power Tracking with Energy/Momentum Wheels* Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.24, No. 1, January-February 2001.
- [15] D.J.Richie, P.Tsiotras and J.L.Fausz *Variable Speed Control Moment Gyroscope Workbench: a New Simulation Tool for Tomorrow's Spacecraft* Paper 0-7803-7034-1/01, IEEE International Conference on Control Applications, 2001.
- [16] P.Tsiotras *Stabilization and Optimality Results for the Attitude Control Problem* Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.19, No. 4, July-August 1996.
- [17] S.R.Marandi, V.J.Modi *A Preferred Coordinate System and the Associated Orientation Representation in Attitude Dynamics*. Acta Astronautica, Vol.15, 1987.

- [18] M.D.Shuster *A Survey of Attitude Representations* Journal of the Astronautical Science, Vol.41, No. 4, 1993.
- [19] H.Shaub, J.L.Junkins *Stereographic Orientation Parameters for Attitude Dynamics: a Generalization of Rodriguez Parameters* Journal of the Astronautical Science, Vol.44, No. 1, 1996.
- [20] John B.Roes *An Electro-Mechanical Energy Storage System For Space Application* Progress in Astronautics and Rocketry, Vol. 3, Academic Press, 1961, pp. 613-622.
- [21] Joseph A. Paradiso *Global Steering of Single Gimbaled Control Moment Gyroscopes Using a Directed Search*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.15, No.5, September-October 1992.
- [22] F. L. Markley, S. F. Andrews, J. R. O'Donnell, Jr., D. K. Ward, A. J. Ericsson *The Microwave Anisotropy Probe Attitude Control System*, 5-th Cranfield Conference on Dynamic and Control of Systems and Structures in Space, King's College, Cranfield, 2002.

Libri

- [23] J.J.Slotine *Applied Non Linear Control*
- [24] Bong Wie *Space Vehicle Dynamics and Control* AIAA Education Series, Published by AIAA, Inc., Reston, VA 1998.
- [25] L.Mangiacasale *Meccanica del Volo Atmosferico* Levrotto e Bella, Torino, 1992.
- [26] P.C.Hughes *Spacecraft attitude dynamics* Wiley & Sons, New York, 1986.

Manuali

- [27] Harvey J. Greenberg *A Simplified Introduction to LATEX* University of Colorado at Denver, April 18, 2000.
- [28] The MathWorks *Using Simulink, Version 5* ©COPYRIGHT 1990-2002 by The MathWorks, Inc.